Základy kombinatoriky a teorie grafů – 10. cvičení*

27. dubna 2014

1 Ramseyovy věty

Jako hypergraf označme dvojici $\mathcal{H} = (V, E)$, kde $E \subseteq 2^V$. Řekneme, že $\mathcal{H}$ je m-uniformní, pokud $E \subseteq \binom{V}{m}$. Úplný m-uniformní hypergraf na n vrcholech označíme K_n^m. Je vidět, že grafy odpovídají 2-uniformním hypergrafům.

Věta (Ramseyova věta pro hypergrafy)**.** *Nechť $m, a_1, a_2, \ldots, a_l$ jsou libovolná přirozená čísla. Potom existuje přirozené číslo $n = R_l^m(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ takové, že každé obarvení hran hypergrafu K_n^m l barvami obsahuje úplný hypergraf barvy i na a_i vrcholech pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.*

Čísla $R_l^m(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ ze znění věty se nazývají Ramseyova čísla a v případě grafů (tj. $m = 2$) se značí pouze $R_l(a_1, a_2, \ldots, a_l)$.

Užitečné odhady. Pro každá přirozená čísla n, k platí následující vztahy:

(a) $\left(\frac{k}{e}\right)^k \leq k! \leq ek\left(\frac{k}{e}\right)^k$,

(b) $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$,

(c) $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$.

Příklad 1. *(a) Nalezněte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.*

(b) Ukažte, že v každé posloupnosti $(m-1)(n-1)+1$ různých přirozených čísel existuje buď rostoucí podposloupnost délky m nebo klesající podposloupnost délky n.

Příklad 2. *Happy Ending Problem.*

(a) Ukažte, že v každé množině pěti bodů v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze (tj. žádné tři body neleží na společné přímce) lze nalézt konvexní čtyřúhelník.

(b) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje přirozené $N = N(k)$ takové, že každá množina N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^2$ obsahuje k bodů v konvexní poloze.

Příklad 3 (Schurova věta)**.** *Ukažte, že existuje dost velké $N \in \mathbb{N}$ takové, že obarvíme-li prvky $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ dvěma barvami, pak vždy dokážeme najít $x, y, z \in [N]$, které mají stejnou barvu a platí $x + y - z$ (tj. jednobarevné řešení rovnice).*

Hint: Zvolte $N = R_2(3,3) - 1$ a sestrojte vhodný hranově 2-obarvený graf, zbytek z Ramseyovy věty pro grafy.

Příklad 4. *(a) Uvažme obarvení bodů roviny $\mathbb{R}^2$ třemi barvami. Ukažte, že potom vždy dokážeme nalézt dva body stejné barvy, které jsou od sebe ve vzdálenosti jedna.*

(b) Ukažte, že existuje 2-obarvení bodů roviny, ve kterém není jednobarevný rovnostranný trojúhelník s hranami jednotkové délky.

Příklad 5. *Ukažte, že $R_2(C_4, C_4) = 6$, tedy že v každém červeno-modrém obarvení hran K_6 najdeme jednobarevný 4-cyklus.*

Příklad 6. *(a) Najděte obarvení hran třemi barvami úplného grafu na 16 vrcholech, ve kterém není jednobarevný trojúhelník, neboli $R_3(3,3,3) \geq 17$.*

(b) Dokažte platnost nerovnost $R_k(3, \ldots, 3) \leq \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$.

Příklad 7 (*)**.** *Dokažte, že pro každé přirozené $k \geq 2$ platí vztah*

$$2^{k/2} \leq R_2(k,k) \leq 2^{2k}.$$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/