

Topologické metody v kombinatorice — 1. série
Základy obecné a algebraické topologie

zadáno 27.2.2019, odevzdat do 20.3.2019

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

Příklad 1. Nechtě X, Y jsou topologické prostory, $f: X \rightarrow Y$ spojitá funkce a $M, N \subseteq X$. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení.

(a) Je-li M uzavřená, potom je i $f(M)$ uzavřená. [1]

(b) Je-li M otevřená, potom je i $f(M)$ otevřená. [1]

(c) Je-li M souvislá, potom je i $f(M)$ souvislá. [1]

(d) Je-li M nesouvislá, potom je i $f(M)$ nesouvislá. [1]

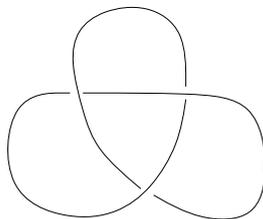
(e) Je-li M uzavřená a N kompaktní, potom je i $M \cap N$ kompaktní. [1]

Příklad 2. Dokažte, že následující dvě definice spojitosti funkce $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní: [2]

(i) Je-li $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, potom je i $f^{-1}(U)$ otevřená v \mathbb{R}^m .

(ii) Pro každé $a \in \mathbb{R}^m$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $b \in \mathbb{R}^m$ splňující $|b - a| < \delta$ platí $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$.

Příklad 3. Rozdělte následující prostory do tříd ekvivalence homeomorfismu: \mathbb{R} , $[0, 1]$, $(0, 1)$, S^1 , množina $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tvořící uzel (viz obrázek). Zdůvodněte. [3]



Příklad 4. Nechtě X je pokryto konečně mnoha uzavřenými množinami A_1, A_2, \dots, A_n a nechtě $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení, jehož restrikce na každé A_i je spojitá. Dokažte, že zobrazení f je spojité. [2]

Příklad 5. Kneserův graf $KG_{n,r}$, kde $1 \leq r \leq n/2$, je graf, jehož vrcholy jsou r -prvkové podmnožiny množiny $\{1, \dots, n\}$ a kde $\{A, B\}$ tvoří hranu, právě když $A \cap B = \emptyset$. Ukažte, že Kneserův graf $KG_{n,r}$ lze obarvit $n - 2r + 2$ barvami. [2]

Příklad 6. Dokažte, že každé dva souvislé grafy se stejným počtem vrcholů a stejným počtem hran jsou homotopicky ekvivalentní. [4+nápoj]

Řešení tohoto příkladu je možné odevzdávat do **27.3.2019**. Nápověda k tomuto příkladu bude uvedena **20.3.2019**.