Topologické metody v kombinatorice[1] – 5. série
Brouwerova věta o pevném bodu a stupeň zobrazení

zadáno 29.4.2015, odevzdat do 20.5.2015

Příklad 1. *Nechť K a L jsou simpliciální komplexy a nechť $f\colon V(K) \to V(L)$ je simpliciální zobrazení. Dokažte, že řetězcové zobrazení $f_\#$ indukované simpliciálním zobrazením f komutuje s hraničním operátorem ∂, neboli $f_{\#,k-1} \circ \partial_k = \partial_k \circ f_{\#,k}$.* **[2]**

Příklad 2. *Na motivy Brouwerovy věty o pevném bodu.*

(a) Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, pro které existuje $D \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\|f(x) - x\| \leq D$. Dokažte, že f je na. **[3]**

(b) Řekneme, že množina $F \subseteq B^n$ je fixovatelná*, pokud existuje spojité zobrazení $f\colon B^n \to B^n$ takové, že $F = \{x \in B^n : f(x) = x\}$. Dokažte, že F je fixovatelná právě tehdy, když je F neprázdná a uzavřená.* **[1+3]**

Příklad 3. *Dokažte, že pro libovolné celé číslo z a přirozené číslo d existují triangulace K_1 a K_2 sféry S^d a simpliciální zobrazení z K_1 do K_2 takové, že $\deg f = z$.* **[3]**

Příklad 4. *Nechť K je simpliciální komplex, který vznikne následujícím způsobem. Uvažme k šachovnic, kdy každá šachovnice má o jeden řádek víc, než je počet jejích sloupců. (Různé šachovnice ale mohou mít různé velikosti.) Vrcholy K jsou možná umístění jedné věže na některou z šachovnic. Simplexy K jsou kolekce věží (jakožto vrcholů K), které se navzájem neohrožují. Dokažte, že K je orientovatelná pseudovarieta.* **[1+3]**

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/