Topologické metody v kombinatorice[1] – 3. série
Borsukova–Ulamova věta

zadáno 25.3.2015, odevzdat do 15.4.2015

Příklad 1. *Dokažte přímo 1-dimenzionální verzi (LS-o) Ljusternikovy–Šnireľmanovy věty, tj. dokažte, že pro každé pokrytí S^1 dvěma otevřenými množinami existuje dvojice antipodálních bodů obsažená v jedné z množin.* **[2]**

Příklad 2. *Nechť T je torus reprezentovaný jako $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$*

(a) Nalezněte příklad spojitého $f\colon T \to \mathbb{R}^2$, pro které neexistuje $x \in T$ takové, že $f(x) = f(-x)$. **[2]**

(b) Dokažte, že pro každé spojité $f\colon T \to \mathbb{R}$ existuje $x \in T$ takové, že $f(x) = f(-x)$ **[1]**

Příklad 3. *Ukažte, že následující tvrzení je ekvivalentní s některou verzí Borsukovy–Ulamovy věty: V každém pokrytí sféry S^n množinami $F_1, \ldots, F_{n+1}$, z nichž každá je uzavřená nebo otevřená, lze najít jednu množinu F_i obsahující pár antipodálních bodů (tedy $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).* **[3]**

Příklad 4. *Ukažte, že následující tvrzení je ekvivalentní s některou verzí Borsukovy–Ulamovy věty: Nechť $f\colon S^n \to S^n$ je antipodální. Potom každé zobrazení $g\colon S^n \to S^n$ s f homotopické je surjektivní.* **[2+2]**

Příklad 5. *(Borsukův graf) Pro $\alpha \in (0, 2)$ označme jako $B(n+1, \alpha)$ (nekonečný) graf, který má jako množinu vrcholů S^n (standardně vnořenou v $\mathbb{R}^{n+1}$) a ve kterém jsou dva vrcholy spojené hranou právě tehdy, když jsou v Eukledidovské vzdálenosti alespoň α. Dokažte, že následující tvrzení je ekvivalentní s některou verzí Borsukovy–Ulamovy věty: Pro každé $\alpha \in (0, 2)$ máme $\chi(B(n + 1, \alpha)) \geq n + 2$, kde χ označuje chromatické číslo.* **[3]**

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/