Topologické metody v kombinatorice[1] – 2. série
Homotopie a simpliciální komplexy

zadáno 11.3.2015, odevzdat do 1.4.2015

Příklad 1. *Mějme topologické prostory W, X, Y a Z a zobrazení $f_1, f_2\colon W \to X$, $g\colon X \to Y$, $h_1, h_2\colon Y \to Z$.*

(a) Dokažte, že pokud jsou f_1 a f_2 homotopická, potom i $g \circ f_1$ a $g \circ f_2$ jsou homotopická. **[1]**

(b) Dokažte, že pokud jsou h_1 a h_2 homotopická, potom i $h_1 \circ g$ a $h_2 \circ g$ jsou homotopická. **[1]**

Příklad 2. *Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi dvěma topologickými prostory nazveme* nullhomotopické*, pokud je homotopické s konstantním zobrazením. Dokažte, že topologický prostor X je kontraktibilní právě tehdy, když*

(a) pro každý topologický prostor Y a každé spojité $f\colon X \to Y$ je f nullhomotopické. **[1]**

(b) pro každý topologický prostor Y a každé spojité $f\colon Y \to X$ je f nullhomotopické. **[1]**

Můžete využít řešení předchozího příkladu.

Příklad 3. *Nakreslete triangulaci toru s co možná nejmenším počtem simplexů. Nemusíte dokazovat, že se jedná o nejmenší možný počet.* **[2]**

Příklad 4. *Šachovnicový komplex $\mathsf{\check{S}}_{m,n}$ je definován tak, že jeho vrcholy jsou pole šachovnice $m \times n$ a jeho stěny jsou takové množiny polí, že žádné dvě neleží ani ve stejném řádku ani ve stejném sloupci (tj., položíme-li na ně věže, tak se navzájem neohrožují). Popište topologicky $\mathsf{\check{S}}_{3,4}$, tedy určete, kterému známému topologickému prostoru je $|\mathsf{\check{S}}_{3,4}|$ homeomorfní.* **[3]**

Příklad 5. *Nechť Δ je geometrický simpliciální komplex. Pro každý neprázdný simplex (včetně vrcholů) $\sigma \in \Delta$ uvažujme bod t_σ v těžišti simplexu σ.* Barycentrickým podrozdělením *komplexu Δ rozumíme soubor simplexů*

$$\operatorname{sd}\Delta := \big\{ \operatorname{conv}\{t_{\sigma_1}, \dots, t_{\sigma_k}\}\colon \sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Delta, \emptyset \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_k \big\}.$$

(a) Pořádně dokažte, že $\operatorname{sd}\Delta$ je geometrický simpliciální komplex takový, že $|\Delta| = |\operatorname{sd}\Delta|$. **[3]**

(b) Dokažte, že pro každé n a $\delta > 0$ existuje k takové, že pro každý n-dimenzionální simplex σ^n s průměrem 1 platí, že průměr každého simplexu v $\operatorname{sd}^k(\sigma^n)$ (k-krát iterované barycentrické podrozdělení simplexu σ^n) je menší než δ. **[3]**

Můžete bez důkazu využít fakt, že průměr každého simplexu je délka jeho nejdelší hrany.

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/