Topologické metody v kombinatorice[1] – 1. série
Základy obecné a algebraické topologie

zadáno 25.2.2015, odevzdat do 18.3.2015

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

Příklad 1. *Nechť X, Y jsou topologické prostory, $f\colon X \to Y$ spojitá funkce a $M, N \subseteq X$. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení.*

(a) Je-li M uzavřená, potom je i $f(M)$ uzavřená. **[1]**

(b) Je-li M otevřená, potom je i $f(M)$ otevřená. **[1]**

(c) Je-li M souvislá, potom je i $f(M)$ souvislá. **[1]**

(d) Je-li M nesouvislá, potom je i $f(M)$ nesouvislá. **[1]**

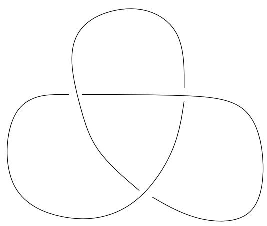
(e) Je-li M uzavřená a N kompaktní, potom je i $M \cap N$ kompaktní. **[1]**

Příklad 2. *Dokažte, že následující dvě definice spojitosti funkce $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní:* **[2]**

(i) Je-li $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, potom je i $f^{-1}(U)$ otevřená v $\mathbb{R}^m$.

(ii) Pro každé $a \in \mathbb{R}^m$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $b \in \mathbb{R}^m$ splňující $|b - a| < \delta$ platí $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$.

Příklad 3. *Rozdělte následující prostory do tříd ekvivalence homeomorfismu: $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $(0,1)$, S^1, množina $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tvořící uzel (viz obrázek). Zdůvodněte.* **[3]**



Příklad 4. *Nechť X je pokryto konečně mnoha uzavřenými množinami $A_1, A_2, , \ldots, A_n$ a nechť $f\colon X \to Y$ je zobrazení, jehož restrikce na každé A_i je spojitá. Dokažte, že zobrazení f je spojité.* **[2]**

Příklad 5. *Kneserův graf $\mathrm{KG}_{n,r}$, kde $1 \le r \le n/2$, je graf, jehož vrcholy jsou r-prvkové podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$ a kde $\{A, B\}$ tvoří hranu, právě když $A \cap B = \emptyset$. Ukažte, že Kneserův graf $\mathrm{KG}_{n,r}$ lze obarvit $n - 2r + 2$ barvami.* **[2]**

Příklad 6. *Dokažte, že každé dva souvislé grafy se stejným počtem vrcholů a stejným počtem hran jsou homotopicky ekvivalentní.* **[4+nápov]**

Řešení tohoto příkladu je možné odevzdávat do **25.3.2015**. *Nápověda k tomuto příkladu bude uvedena* **18.3.2015**.

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/