Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení*

6. května 2024

1 Dualita její aplikace

Příklad 1. *Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy* Nalezení minimálního vrcholového pokrytí *ve váženém grafu $G = (V, E, w)$, kde $w\colon V \to \mathbb{R}^+$. Pro připomenutí, tato relaxace vypadá následovně:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_v \geq 0 \textit{ pro každé } v \in V \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{v \in V} w(v) x_v \\ \textit{Podmínky}: \quad & x_u + x_v \geq 1 \textit{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Jaký problém řeší duální úloha pro jednotkové váhy?

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v, u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z, v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v, z).$$

Řezem v síti je množina R hran vedoucích z množiny vrcholů Z do množiny vrcholů $S = V \setminus S$, kde $z \in Z$ a $s \in S$. *Kapacitou řezu R* je $\sum_{e \in R} c(e)$.

Příklad 2. *Uvažme následující úlohu lineárního programování pro problém* Nalezení maximálního toku *v síti $(G = (V, E), z, s, c)$:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_e \geq 0 \textit{ pro každé } e \in E \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \max x_{s,z} \\ \textit{Podmínky}: \quad & \sum_{u:(u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{u:(v,u) \in E} x_{v,u} = 0 \textit{ pro každé } v \in V \\ & x_e \leq c(e) \textit{ pro každé } e \in E \end{aligned}$$

(V tomto programu jsme přidali hranu (s, z) „nekonečně“ velké kapacity, čímž tok cirkuluje a program se tak zjednoduší uvedením podmínek Kirchhoffových zákonů i pro zdroj a stok).

Sestrojte duál této úlohy a (*) nahlédněte, že odpovídá relaxaci úlohy Nalezení řezu minimální kapacity v síti.

Příklad 3. *(a) Uvažte následující lineární program pro orientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho vrcholy s a t:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_v \in \mathbb{R} \textit{ pro každé } v \in V \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \max x_t \\ \textit{Podmínky}: \quad & x_s = 0 \\ & x_v - x_u \leq 1 \textit{ pro každé } (u, v) \in E \end{aligned}$$

Nahlédněte, že řeší úlohu Nalezení délky nejkratší cesty *mezi vrcholy s a t v G. V účelové funkci je skutečně maximum, i když chceme nalézt nejkratší cestu.*

(b) Zkonstruujte duál k předešlé úloze. Jaký problém duál řeší?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

2 Komplementarita

Věta 1 (Věta o komplementaritě)**.** *Mějme úlohu lineárního programování P a její duál D v následující formě:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \tag{P}$$

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}, A^\top \mathbf{y} \ge \mathbf{c}, \mathbf{y} \ge \mathbf{0}. \tag{D}$$

Mějme přípustná řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ pro P a D a označme jako $A_{j,i}$ prvek matice A na pozici (j,i). Pak $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ jsou optimálními řešeními úloh P a D právě tehdy, když platí následující dva vztahy

$$x_i = 0 \text{ nebo } \sum_{j=1}^{m} A_{j,i} y_j = c_i \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a}$$

$$y_j = 0 \text{ nebo } \sum_{i=1}^{n} A_{j,i} x_i = b_j \text{ pro každé } j \in \{1, \dots, m\}.$$

První vztah říká, že pro každé i je buď i-tá proměnná primáru nulová nebo je i-tá podmínka duálu *těsná*. Druhý vztah analogicky říká, že pro každé j je buď j-tá proměnná duálu nulová nebo je j-tá podmínka primáru těsná. Tento výsledek nám pomůže ověřovat optimalitu řešení či například určovat optima duálu z optim primáru.

Příklad (Řešený příklad)**.** *Mějme následující primár P a duál D:*

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &\le 12 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\le 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\le 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned} \tag{P}$$

a

$$\begin{aligned} \min 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 &\ge 2 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 &\ge 4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\ge 3 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 &\ge 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Buď $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$ optimem v P. Určete optimum v D.

Řešení. Pode Věty o komplementaritě jsou 2. a 4. nerovnost v D splněny těsně, protože $x_2 \neq 0$ a $x_4 \neq 0$. V primáru P po dosazení hodnot $\mathbf{x}^*$ vidíme, že 2. nerovnost v P není těsná a podle Věty o komplementaritě tedy máme $y_2 = 0$. Dosazením $y_2 = 0$ do 2. a 4. nerovnosti v D zapsaných s rovností dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &= 4 \\ 4y_1 - y_3 &= 1, \end{aligned}$$

jejíž řešení $\mathbf{y}^* = (1, 0, 3)$ je přípustné pro D a tedy je optimem v D. □

Příklad 4. *Optimálním řešením duální úlohy D k následující úloze P je $\mathbf{y}^* = \left(0, 7, \frac{11}{2}, 0\right)$.*

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\le 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\le -1 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_3 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned} \tag{P}$$

(a) Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru P.

(b) Nalezněte vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, které splňují oba vztahy z Věty o komplementaritě, ale ani $\mathbf{x}$ a ani $\mathbf{y}$ nejsou optimálními řešeními pro P a D.

Příklad 5. *Mějme následující zadání duálu D úlohy P:*

$$\begin{aligned} \max 3y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 4y_4 & \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 &\leq 5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 &= 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Přípustným řešením primáru P je $\mathbf{x}' = (4, 0, -1)$. Je toto řešení primáru optimem v P?