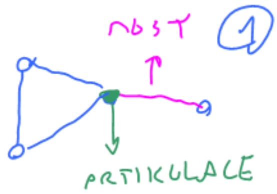
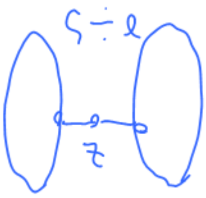
2-SOUVISLOST PODROBNĚJI:



- HRANOVÝ ŘEZ VELIKOSTI JEDNA SE NAZÝVÁ **MOST**
- VRCHOLOVÝ ŘEZ VELIKOSTI JEDNA SE NAZÝVÁ **ARTIKULACE**
- PRO GRAF $G=(V,E)$ A $e \in E$ OZNAČME JAKO $G \div e$ GRAF VZNIKLÝ Z G OPERACÍ **PODROZDĚLENÍ HRANY** e NA CESTU DÉLKY 2 ($x \overset{e}{—} y \longrightarrow x — \bullet — y$)
- **LEMMA 1**: PRO KAŽDÝ GRAF $G=(V,E)$ A PRO KAŽDOU HRANU $e \in E$ PLATÍ:
  G JE VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ $\Leftrightarrow$ $G \div e$ JE VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ

DK:

- i) $\Leftarrow$
  PRO $v \in V$ JE $G-v$ SOUVISLÝ $\Leftrightarrow$ $(G \div e)-v$ JE SOUVISLÝ
  - v JE VRCHOLEM I V $G \div e$
- ii) $\Rightarrow$ STAČÍ UVÁŽIT ODEBRÁNÍ NOVĚ PŘIDANÉHO VRCHOLU z PŘI PODROZDĚLENÍ HRANY e
  - G JE VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ $\Rightarrow |V| \geq 3$
  - JE-LI z ARTIKULACÍ, PAK JE ARTIKULACÍ I ASPOŇ JEDEN Z KONCŮ HRANY e (PROTOŽE $|V| \geq 3$) ⊠



- **VĚTA 1 (UŠATÉ LEMMA)**:
  GRAF G JE VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ $\Leftrightarrow$ G LZE VYTVOŘIT Z K_3 OPERACEMI PŘIDÁVÁNÍ A PODROZDĚLOVÁNÍ HRAN

PROČ „UŠATÉ LEMMA“?
PŘIDÁNÍ HRANY A JEJÍ NÁSLEDNÉ ROZDĚLENÍ ODPOVÍDÁ PŘIDÁNÍ CESTY MEZI 2 VRCHOLY (= „PŘILEPENÍ UCHA“)

- MÁME **ALTERNATIVNÍ ZNĚNÍ** VĚTY 1:
  G JE VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ $\Leftrightarrow$ G LZE VYTVOŘIT Z CYKLU PŘIDÁVÁNÍM UŠÍ

DK:

- i) $\Leftarrow$ K_3 JE VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ A DLE **LEMMA 1** PODROZDĚLENÍ HRANY VRCHOLOVOU 2-SOUVISLOST NESNÍŽUJE
  - PŘIDÁNÍ HRANY VRCHOLOVOU 2-SOUVISLOST TAKÉ NESNÍŽUJE
    ↳ VÍME Z MINULÉ PŘEDNÁŠKY

ii) CHCEME UKÁZAT, ŽE DANÝ VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ GRAF G LZE ZÍSKAT Z CYKLU LEPENÍM UŠÍ

- BUĎ G_0 LIBOVOLNÝ CYKLUS V $G = (V, E)$
  - NĚJAKÝ CYKLUS V G EXISTUJE, JINAK JE G LES A NENÍ VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ
- MĚJME JIŽ DEFINOVANÉ GRAFY $G_0, \dots, G_i$, KDE $G_{j+1} = (V_{j+1}, E_{j+1})$ VZNIKNE Z G_j PŘILEPENÍM UCHA P_j
- POKUD $G_i = G$, TAK JSME HOTOVI
- JINAK $E_i \neq E$
- PROTOŽE G JE SOUVISLÝ, TAK $\exists e \in E \setminus E_i$ TAKOVÁ, ŽE $e \cap V_i \neq \emptyset$
- POKUD $e \subseteq V_i$, TAK DEFINUJEME $G_{i+1} = G_i + e$
- JINAK $e = \{v, v'\}$, KDE $v \in V_i$ A $v' \notin V_i$
- G JE VRCHOLOVĚ 2-SOUVISLÝ $\Rightarrow$ $G - v$ JE SOUVISLÝ $\Rightarrow \exists$ CESTA P V $G - v$ SPOJUJÍCÍ v' A $v'' \in V_i$ (BÚNO $P - v''$ LEŽÍ CELÁ MIMO V_i)

$\Rightarrow$ DEFINUJME G_{i+1} JAKO GRAF VZNIKLÝ Z G PŘIDÁNÍM UCHA TVOŘENÉHO CESTOU P A HRANOU e

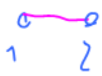
⊠

POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY:

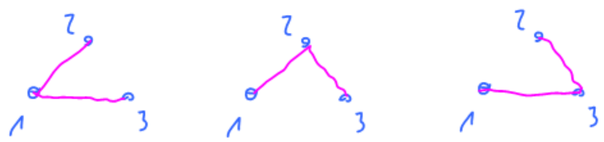
- METODA DŮKAZŮ V KOMBINATORICE
- URČÍME NĚJAKÝ NEZNÁMÝ POČET X VYJÁDŘENÍM NĚJAKÉHO POČTU Z DVĚMA VÝRAZY, Z NICHŽ JEDEN X OBSAHUJE A DRUHÝ NE ⇒ MÁME VYJÁDŘENÍ PRO X
  - VAN LINT A WILSON TUTO TECHNIKU OZNAČUJÍ ZA JEDEN Z NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH NÁSTROJŮ V KOMBINATORICE
- S TOUTO TECHNIKOU JSME SE JIŽ SETKALI NAPŘÍKLAD U:
  - PRINCIPU SUDOSTI
  - BINOMICKÉ VĚTY
  - DŮKAZU, ŽE $\exists$ $n-1$ MOLČ $\Leftrightarrow$ $\exists$ KPR ŘÁDU n
- UKÁŽEME SI DALŠÍ (A POKROČILEJŠÍ) PŘÍKLADY POUŽITÍ

1) CAYLEYHO VZOREC:

- KOLIKA ZPŮSOBY LZE VYTVOŘIT STROM NA VRCHOLECH $\{1, \dots, n\}$?
- NEBOLI JAKÝ JE POČET KOSTER $\kappa(n)$ GRAFU K_n?
  - KOSTRA GRAFU $G=(V,E)$ JE STROM $T=(V,E')$ S $E' \subseteq E$
- PŘÍKLAD:



$\kappa(2) = 1$



$\kappa(3) = 3$

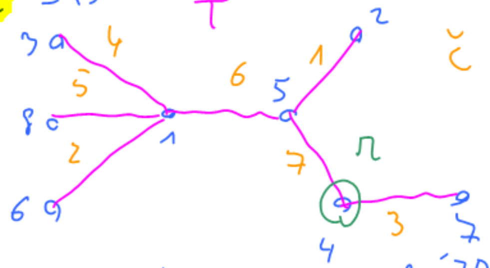
4 × 12 ×

$\Rightarrow \kappa(4) = 16$

- ČÍSLO $\kappa(n)$ SE ZAČALO STUDOVAT V SOUVISLOSTI S ELEKTRICKÝMI OBVODY
  - HRANY GRAFU G = VODIČE S JEDNOTKOVÝM ODPOREM
  - $\{x,y\}$ = HRANA G, PAK ODPOR MEZI x A y = $\frac{\text{POČET KOSTER } G \text{ OBSAHUJÍCÍCH HRANU } \{x,y\}}{\text{POČET KOSTER } G}$

- **VĚTA 2 (CAYLEYHO VZOREC):** PRO KAŽDÉ $n \geq 2$ PLATÍ $\kappa(n) = n^{n-2}$
  - ŘADA DŮKAZŮ S VELMI ODLIŠNÝMI MYŠLENKAMI
  - UKÁŽEME SI NEJJEDNODUŠŠÍ DŮKAZ ZALOŽENÝ NA POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY (OBJEVENÝ JIMEM PITMANEM (1999))

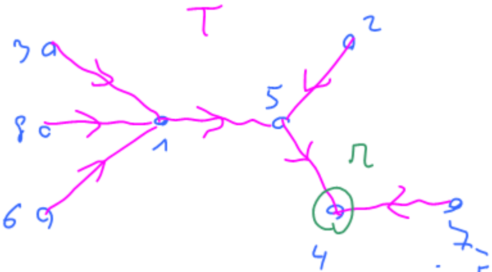
- DK CAYLEYHO FORMULE:
  - BUDEME DVĚMA ZPŮSOBY POČÍTAT POVYKOSY = „POSTUP VÝROBY KOŘENOVÉHO STROMU", FORMÁLNĚ: USPOŘÁDANÁ TROJICE $(T, r, č)$, KDE
    - T = STROM $(\{1, \dots, n\}, E)$
    - r = KOŘEN T
    - $č$ = BIJEKCE $E \to \{1, \dots, n-1\}$ (ČÍSLOVÁNÍ HRAN)
  - PŘÍKLAD:



  - VYTVÁŘÍME KOŘENOVÝ STROM Z PRÁZDNÉHO GRAFU POSTUPNÝM PŘIDÁVÁNÍM HRAN V POŘADÍ URČENÉM FUNKCÍ $č$

1) 1. ZPŮSOB POČÍTÁNÍ POVYKOSŮ:
  - V KAŽDÉM STROMĚ T S n VRCHOLY LZE KOŘEN ZVOLIT n ZPŮSOBY A POČET MOŽNÝCH POŘADÍ HRAN JE $(n-1)!$ $\Rightarrow$ POČET POVYKOSŮ Z JE $n(n-1)!\,\kappa(n)$

2) 2. ZPŮSOB POČÍTÁNÍ POVYKOSŮ:
  - KOŘENOVÝ STROM (T, r) UVAŽÍME JAKO ORIENTOVANÝ STROM, KDE ŠIPKY SMĚŘUJÍ KE KOŘENU r
  - PŘÍKLAD:



  - KAŽDÁ ORIENTACE STROMU S PRÁVĚ JEDNÍM VRCHOLEM, KTERÝ NENÍ ZAČÁTKEM ŽÁDNÉ ŠIPKY, JEDNOZNAČNĚ ODPOVÍDÁ KOŘENOVÉMU STROMU
  - POVYKOSY SPOČÍTÁME TAK, ŽE K PRÁZDNÉMU ORIENTOVANÉMU GRAFU BUDEME PŘIDÁVAT ŠIPKY V $n-1$ KROCÍCH
  - 1. ŠIPKA LZE PŘIDAT $n(n-1)$ ZPŮSOBY (SPOJUJE 2 RŮZNÉ VRCHOLY)
  - 2. ŠIPKA NESMÍ VYCHÁZET ZE STEJNÉHO VRCHOLU JAKO TA PRVNÍ
  - OBECNĚ a) NELZE VYTVOŘIT (NEORIENTOVANOU) KRUŽNICI
    $\Rightarrow$ NOVÁ ŠIPKA SPOJUJE 2 KOMPONENTY

    b) Z KAŽDÉHO VRCHOLU AŽ NA JEDEN MUSÍ VYCHÁZET ≥ 1 ŠIPKA
    - CELKEM MÁME $n-1$ ŠIPEK $\Rightarrow$ KAŽDÁ VYCHÁZÍ Z VRCHOLU, Z NĚJŽ JEŠTĚ NIC NEVYCHÁZÍ

- V KAŽDÉ KOMPONENTĚ JE PRÁVĚ 1 VRCHOL, Z NĚJŽ ŽÁDNÁ ŠIPKA NEVYCHÁZÍ („KOŘEN KOMPONENTY")
  - KOMPONENTA MÁ m VRCHOLŮ A $m-1$ HRAN A PODLE b) Z KAŽDÉHO VYCHÁZÍ ≤ 1 ŠIPKA

$\Rightarrow$ PO PŘIDÁNÍ k ŠIPEK MÁ GRAF $n-k$ KOMPONENT

$\Rightarrow$ $(k+1)$-NÍ ŠIPKA VEDE Z KOŘENE NĚJAKÉ KOMPONENTY DO LIBOVOLNÉHO VRCHOLU JINÉ KOMPONENTY $\Rightarrow (n-k-1)n$ MOŽNOSTÍ

$\Rightarrow$ POČET POSLOUPNOSTÍ JE $z = \prod_{k=0}^{n-2} (n-k-1)n = (n-1)! \cdot n^{n-1}$

$\Rightarrow$ Z OBOU ZPŮSOBŮ MÁME $n(n-1)! \cdot \kappa(n) = z = (n-1)! \, n^{n-1} \Rightarrow \underline{\underline{\kappa(n) = n^{n-2}}}$ $\boxtimes$

- **VĚTA 3**:
  GRAF $K_n - e$ MÁ $(n-2) \cdot n^{n-3}$ KOSTER

DK:
- OPĚT POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY
- OZNAČME POČET KOSTER GRAFU $G=(V,E)$ JAKO $\kappa(G)$ A MĚJME $e \in E$ JAKO $\kappa_e(G)$ POČET KOSTER GRAFU G OBSAHUJÍCÍCH HRANU e
- PLATÍ $\kappa(G) = \kappa(G-e) + \kappa_e(G)$ PRO KAŽDÝ GRAF G (*)
- CHCEME UKÁZAT $\kappa(K_n - e) = (n-2) \cdot n^{n-3}$
- URČÍME $\kappa_e(K_n)$ SPOČÍTÁNÍM $z = |\{(e,T) : T = \text{KOSTRA } K_n, e \in E(T)\}|$

DVĚMA ZPŮSOBY SPOČÍTÁNÍ z:

- 1) 1. ZPŮSOB
  - $z = \underbrace{\kappa(K_n)}_{\text{VOLBA } T} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\text{VOLBA } e \in E(T) \text{ PRO DANÉ } T} \overset{\text{VĚTA 2}}{=} n^{n-2} \cdot (n-1)$
- 2) 2. ZPŮSOB SPOČÍTÁNÍ z:
  - $z = \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{VOLBA } e} \cdot \underbrace{\kappa_e(K_n)}_{\text{VOLBA } T \text{ OBSAHUJÍCÍCH DANOU HRANU } e}$

$\Rightarrow n^{n-2} \cdot (n-1) = z = \binom{n}{2} \cdot \kappa_e(K_n) \Rightarrow \kappa_e(K_n) = \frac{(n-1)n^{n-2}}{\binom{n}{2}} = \underline{\underline{2 \cdot n^{n-3}}}$

- PODLE (*) PRO $G = K_n$ TAK MÁME $\underbrace{\kappa(K_n)}_{= n^{n-2}} = \kappa(K_n - e) + \underbrace{\kappa_e(K_n)}_{= 2 \cdot n^{n-3}}$

$\Rightarrow \kappa(K_n - e) = \underline{\underline{(n-2) n^{n-3}}}$

$\boxtimes$

- POČET KOSTER $\kappa(G)$ GRAFU $G=(\{1,\dots,n\},E)$ LZE URČIT POMOCÍ DETERMINANTŮ
- UVAŽME LAPLACIÁN $L(G)$ GRAFU G, TEDY MATICI $L(G)=(L_{ij})_{i,j=1}^{n}$, KDE

$$L_{ij}=\begin{cases}\deg_G(i) & i=j\\ -1 & \{i,j\}\in E\\ 0 & \text{JINAK}\end{cases}$$

- VĚTA 4:

$$\forall G:\ \kappa(G)=\det\big(\underbrace{L(G)^{1,1}}_{\text{LAPLACIÁN } L(G) \text{ BEZ 1. ŘÁDKU A 1. SLOUPCE}}\big)$$

  - BEZ DŮKAZU

- PŘÍKLAD:

$$-\ L(K_n)=\underbrace{\begin{pmatrix} n-1 & & -1\\ & \ddots & \\ -1 & & n-1\end{pmatrix}}_{n}\Bigg\}\,n$$

$$-\text{POTOM } L(K_n)^{1,1}= {\scriptstyle n-1}\Bigg\{\underbrace{\begin{pmatrix} n-1 & & -1\\ & \ddots & \\ -1 & & n-1\end{pmatrix}}_{n-1}\sim\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & *\\ & n & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n\end{pmatrix}}_{n-1}\Bigg\}\,n-1$$

$$\Rightarrow \kappa(K_n)\overset{\text{VĚTA 4}}{=}\det\big(L(K_n)^{1,1}\big)=\underline{\underline{n^{n-2}}}$$