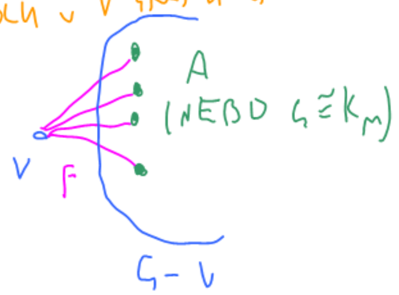
– MÍRA SOUVISLOSTI GRAFŮ:

- PŘIPOMENUTÍ:
  - GRAF JE **SOUVISLÝ**, POKUD JSOU KAŽDÉ JEHO DVA VRCHOLY SPOJENÉ CESTOU
  - JINAK JE GRAF **NESOUVISLÝ** A JE ROZDĚLEN NA ≥ 2 **KOMPONENTY SOUVISLOSTI**
- BUDEME ZKOUMAT MÍRU SOUVISLOSTI GRAFŮ, ČILI JAK MOC JE GRAF ODOLNÝ PROTI ROZPADNUTÍ PŘI ODEBÍRÁNÍ HRAN ČI VRCHOLŮ
- **HRANOVÝM ŘEZEM** V GRAFU $G=(V,E)$ JE MNOŽINA HRAN $F \subseteq E$ TAKOVÁ, ŽE GRAF $G-F=(V, E\setminus F)$ JE NESOUVISLÝ (HRANOVÝ ŘEZ SE NĚKDY NAZÝVÁ **SEPARÁTOR**)
- **VRCHOLOVÝM ŘEZEM** V G JE MNOŽINA VRCHOLŮ $A \subseteq V$ TAKOVÁ, ŽE GRAF $G-A = \left(V\setminus A, E \cap \binom{V\setminus A}{2}\right)$ JE NESOUVISLÝ
- **HRANOVÁ SOUVISLOST** GRAFU G JE $k_e(G) = \begin{cases} \min\{|F| : F \text{ JE HRANOVÝM ŘEZEM V } G\} \\ 1 & G \cong K_1 \end{cases}$ ($\cong$ = IZOMORFISMUS)
- **VRCHOLOVÁ SOUVISLOST** GRAFU G JE $k_v(G) = \begin{cases} \min\{|A| : A \text{ JE VRCHOLOVÝM ŘEZEM V } G\} \\ 1 & G \cong K_1 \\ m-1 & G \cong K_m \text{ PRO } m \geq 2 \end{cases}$
  - NESOUVISLÉ GRAFY MAJÍ VRCHOLOVOU I HRANOVOU SOUVISLOST 0
- PRO $k \in \mathbb{N}_0$ JE GRAF G **HRANOVĚ k-SOUVISLÝ**, POKUD $k_e(G) \geq k$
  VRCHOLOVĚ k-SOUVISLÝ, POKUD $k_v(G) \geq k$

$\deg_G(v)$ = STUPEŇ VRCHOLU v V GRAFU G

- $\forall\, G=(V,E), G \not\cong K_1 : k_e(G), k_v(G) \leq \min\{\deg_G(v); v \in V\}$



- JAK SE MĚNÍ SOUVISLOST PŘI ODEBÍRÁNÍ HRAN?

– LEMMA 1:

$\forall G=(V,E)\ \forall e \in E: k_e(G)-1 \leq k_e(G-e) \leq k_e(G)$

- ČILI ODEBRÁNÍ HRANY SNÍŽÍ HRANOVOU SOUVISLOST O ≤ 1

– DK:

1) $k_e(G-e) \leq k_e(G)$:
   - JE-LI F MINIMÁLNÍM ŘEZEM V G, PAK $F\setminus\{e\}$ JE HRANOVÝM ŘEZEM (NE NUTNĚ MINIMÁLNÍM) V $G-e$
   $\Rightarrow k_e(G-e) \leq |F\setminus\{e\}| \leq |F| = k_e(G)$
2) $k_e(G)-1 \leq k_e(G-e)$:
   - JE-LI F MINIMÁLNÍM HRANOVÝM ŘEZEM V $G-e$, PAK $F \cup \{e\}$ JE HRANOVÝM ŘEZEM V G
   $\Rightarrow k_e(G) \leq |F \cup \{e\}| = |F|+1 = k_e(G-e)+1$

$\boxtimes$

Lemma 2:

$\forall\, G=(V,E)\ \forall\, e \in E:\ k_v(G)-1 \le k_v(G-e) \le k_v(G)$

- čili i vrcholová souvislost také klesá o ≤ 1 po odebrání hrany

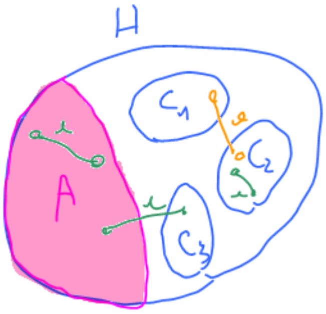
Dk:

- předpokládejme, že $G \ncong K_m$, jinak lze snadno ověřit
- 1) $k_v(G-e) \le k_v(G)$:
  - je-li A minimální vrcholový řez v G, pak A je vrcholovým řezem i v $G-e$ $\Rightarrow k_v(G-e) \le |A| = k_v(G)$
- 2) $k_v(G)-1 \le k_v(G-e)$:
  - ukážeme, že pro $H = G-e$ platí $k_v(H+e) \le k_v(H)+1$
  - protože $H \ncong K_m$, tak $\exists$ vrcholový řez A v H takový, že $k_v(H)=|A|$
  - $C_1,\dots,C_n$ = komponenty grafu $H-A$
  - možnosti podle umístění hrany e:
    - a) e nespojuje 2 komponenty v $H-A$:
      - tedy $e \cap A \ne \emptyset$ nebo $e \subseteq V(C_i)$ pro nějaké $i \in \{1,\dots,n\}$
      - v $H+e$ je A stále vrcholovým řezem $\Rightarrow k_v(H+e) \le |A| = k_v(H)$
    - b) e spojuje 2 komponenty v $H-A$:
      - BÚNO $e=\{x,y\}$, $x \in V(C_1)$, $y \in V(C_2)$, $|V(C_1)| \ge |V(C_2)|$
      - je-li $n \ge 3$, pak A je stále vrcholovým řezem v $H+e$ a máme $k_v(H+e) \le |A| = k_v(H)$
      - tedy $n=2$ ($H-A$ má jen 2 komponenty C_1 a C_2)
      - pokud $|V(C_1)|>1$, pak $A \cup \{x\}$ je vrcholovým řezem v $H+e$ $\Rightarrow k_v(H+e) \le |A \cup \{x\}| = |A|+1 = k_v(H)+1$
      - jinak $|V(C_1)| = 1 = |V(C_2)|$ a platí

$$k_v(H+e) \le |V|-1 = |A|+1 = k_v(H)+1 \qquad \boxtimes$$

z definice $k_v(G)$ platí pro každé $G \ncong K_n$

$|A| = |V|-2$



případ a)
případ b)

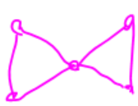
Důsledek 1:

$\forall\, G=(V,E):\ k_v(G) \le k_e(G)$ (vrcholová souvislost je $\le$ hranová souvislost)

Dk:

- indukcí podle $|E|$
- $|E| < |V|-1 \Rightarrow G$ je nesouvislý a $k_e(G) = 0 = k_v(G)$
- jinak máme $k_e(G) > 0$ a zvolme hranu $e \in E$ z min. hranového řezu v G
- potom $k_v(G)-1 \underset{\text{Lemma 2}}{\le} k_v(G-e) \underset{\text{IP pro } G-e}{\le} k_e(G-e) \underset{\text{volba } e \text{ a Lemma 1}}{=} k_e(G)-1 \qquad \boxtimes$

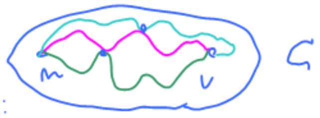
- nerovnost může být ostrá: „motýlek" M:



$k_e(M) = 2 > 1 = k_v(M)$

— **VĚTA 1** (**FORDOVA - FULKERSONOVA VĚTA**):

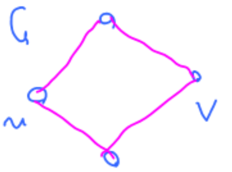
$\forall G\ \forall t \in \mathbb{N}$: $k_e(G) \geq t \iff$ mezi každými 2 vrcholy grafu G $\exists \geq t$ hranově disjunktních cest



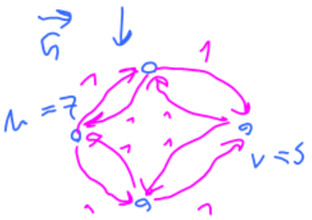
— DK:

1) $\Leftarrow$: — sporem - nechť $\exists$ hranový řez F v G splňující $|F| < t$
 — potom 2 vrcholy v různých komponentách grafu $G - F$ jsou stále spojeny $\geq t - |F| \geq 1$ (hranově disj.) cestami $\Rightarrow$ SPOR

2) $\Rightarrow$: — mějme $G = (V, E)$ s $k_e(G) \geq t$ a vrcholy $u, v \in V$, které chceme spojit t hranově disjunktními cestami



— z G vytvoříme síť $(\vec{G}, u, v, 1)$ nahrazením každé hrany $\{x, y\} \in E$ za (x, y) a (y, x), zvolením zdroje $z = u$, stoku $s = v$ a nastavením jednotkových kapacit u všech hran



— podle **věty o celočíselnosti** v této síti existuje maximální celočíselný tok f
 — f nabývá jen hodnot 0 a 1 a je-li , tak nastavíme  (tím se velikost toku nemění)

— podle **hlavní věty o tocích** $\exists$ min. řez R s $c(R) = w(f)$

— potom $F = \{\{x, y\} : (x, y) \in R$ nebo $(y, x) \in R\}$ je hranovým řezem v G
 ↳ protože R je řezem v síti a cesta z u, v v $G \Rightarrow$ or. cesta z u do v v síti

— dostáváme:
$$t \leq |F| \leq c(R) = w(f) \text{ a proto } w(f) \geq t$$
($k_e(G) \geq t$) (volba F)

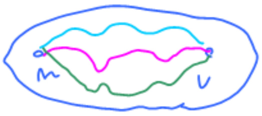
— nyní indukcí podle $w(f)$ zkonstruujeme t cest mezi u a v:
 — $w(f) = 1$ — pak $\exists$ cesta mezi u a v, kde na každé hraně teče 1
 — $w(f) > 1$:
 — $\exists$ cesta P mezi u a v, kde na každé hraně teče 1 a tok po ní vynulujeme $\Rightarrow$ na zbylém toku velikosti $\geq t - 1$ z IP najdeme $\geq t - 1$ hranově disjunktních cest mezi u a v
 — P je s těmito cestami hranově disjunktní, protože nemáme 

☒

— varianta Fordovy-Fulkersonovy věty platí i pro vrcholovou souvislost

- **VĚTA Z (MENGEROVA VĚTA):**

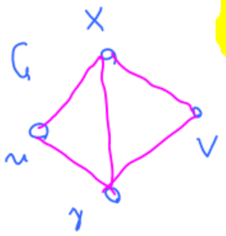
$\forall G\ \forall t \in \mathbb{N}: k_v(G) \geq t \iff$ mezi každými 2 vrcholy grafu G $\exists \geq t$ vrcholově disjunktních cest (mimo u, v)



- **DK:**

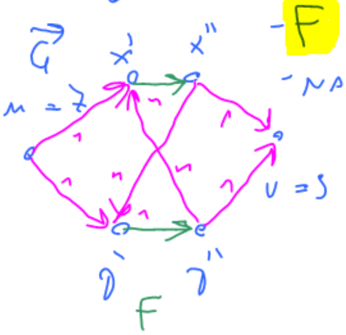
- 1) $\Leftarrow$:
  - spor – nechť $k_v(G) < t$ pro graf $G = (V, E)$
  - potom buď $G \cong K_m$ pro $m \leq t$ nebo $\exists$ vrcholový řez $A \subseteq V$ velikosti $< t$
    - ↓ nenastane, protože pak $\nexists$ t vrcholově disjunktních cest mezi dvěma vrcholy
    - ↓ nenastane, protože na rozpojení $\geq t$ vrcholově disjunktních cest v G je potřeba vrcholový řez velikosti $\geq t$ $\Rightarrow$ spor

- 2) $\Rightarrow$:
  - nechť $k_v(G) = t$ pro graf $G = (V, E)$, chceme najít t vrcholově disjunktních cest mezi dvěma vrcholy $u, v \in V$
  - a) předpokládejme nejdřív $\{u, v\} \notin E$



  - hrany G zdvojíme ($x \text{—} y \to x \rightleftarrows y$), pouze hrany $\{u, x\}$ nahradíme hranami (u, x) a hrany $\{v, y\}$ nahradíme hranami (y, v)
  - všechny vrcholy kromě u a v pak zdvojíme:

TYTO HRANY „SIMULUJÍ" VRCHOLY GRAFU G



  - F = {hrany vzniklé zdvojením vrcholů}
  - nastavíme $z = u$ jako zdroj a $s = v$ jako stok
    - všem hranám nastavíme jednotkové kapacity
    - $\Rightarrow$ síť $(\vec{G}, u, v, \mathbb{1})$
    - podle **věty o celočíselnosti** ve vzniklé síti existuje tok f maximální velikosti $w(f)$
    - f nabývá jen hodnot 0 a 1
  - podle **hlavní věty o tocích** v síti existuje řez R minimální kapacity $c(R) = w(f)$
  - můžeme BÚNO předpokládat $R \subseteq F$
    - jinak lze hranu e z $R \setminus F$ nahradit hranou z F, se kterou sdílí vrchol
    - jediný případ, kdy by e nešlo nahradit, je $e = \{u, v\}$, to je ale zakázané podle našeho předpokladu $\{u, v\} \notin E$
  - je-li $|R| \geq t$, pak podobně jako v předešlém důkazu najdeme t hranově disjunktních cest v síti mezi u a v
    - tedy indukcí podle $c(R) = w(f)$

- SPOREM – NECHŤ $|R| < t$
  - POTOM $A = \{x \in V : (x', x'') \in R\}$ JE VRCHOLOVÝM ŘEZEM V G A PLATÍ $|A| < t$
  $\Rightarrow$ SPOR S $k_v(G) \geq t$
- ZBÝVÁ Z t HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST V SÍTI MEZI u A v ZKONSTRUOVAT t VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST V G VYPUSTÍME CESTU
  - Z CESTY $(u, x_1', x_1'', x_2', x_2'', \ldots, v)$ V SÍTI VYTVOŘÍME CESTU $(u, x_1, x_2, \ldots, v)$
  - VZNIKLÉ CESTY V G JSOU VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍ (MIMO u A v), JINAK DVĚ PŮVODNÍ CESTY V SÍTI SDÍLÍ HRANU Z F

b) POKUD $e = \{u, v\} \in E$, TAK UVÁŽÍME STEJNÝ POSTUP PRO $G - e$ A $k \geq t-1$ NALEZENÝM
- $k_v(G - e) \geq t-1$ PODLE LEMMA 2
VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍM CESTÁM (MIMO u A v) LZE PŘIDAT HRANU e JAKO t-TOU CESTU

$\boxtimes$

- PROTOŽE NALÉZT TOK MAXIMÁLNÍ VELIKOSTI LZE V POLYNOMIÁLNÍM ČASE, TAK MÁME POLYNOMIÁLNÍ ALGORITMUS NA ZJIŠTĚNÍ $k_e(G)$ I $k_v(G)$