APLIKACE TOKŮ V SÍTÍCH:

1) KŐNIGOVA-EGERVÁRYHO VĚTA:

- V grafu $G=(V,E)$ nazveme množinu $C \subseteq V$ **vrcholovým pokrytím**, pokud $C \cap e \neq \emptyset$ pro $\forall e \in E$
- zjistit minimální velikost vrcholového pokrytí je NP-těžká úloha
- **párováním** v G je podgraf tvořený disjunktními hranami
- **VĚTA 3** (**Kőnigova-Egerváryho věta**, 1931): V bipartitním grafu je velikost min. vrcholového pokrytí rovna velikosti maximálního párování
  ↳ co do počtu hran
- určit velikost max. párování v obecném grafu lze v polynomiálním čase
  ⇒ máme polynomiální algoritmus pro nalezení min. vrcholového pokrytí pro bipartitními grafy

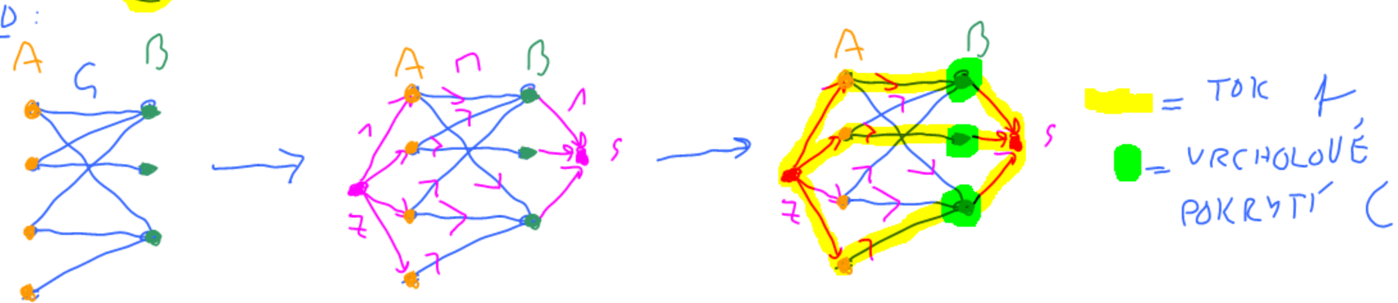
- DK:
  - z bipartitního $G=(A \cup B, E)$ vytvoříme síť přidáním zdroje z, stoku s a hran (z,u) pro $\forall u \in A$, (v,s) pro $\forall v \in B$
  - hrany z E zorientujeme z A do B a všem novým hranám dáme kapacitu 1 a starým hranám kapacitu $m = |A| + |B|$

HLAVNÍ VĚTA O TOCÍCH

  - podle **VĚTY 1** $\exists$ max. tok f a min. řez R s $w(f) = c(R)$
  - f je celočíselný podle **VĚTY 2** → věta o celočíselnosti

  1) $w(f)$ = velikost max. párování v G
     - staré hrany s nenulovým tokem tvoří párování v G
  2) $c(R)$ = velikost min. vrcholového pokrytí v G
     - řez R nepoužívá staré hrany, protože jejich kapacita m je větší než kapacita řezu $\{(z,v) : v \in A\}$
       ⇒ vrcholy z $A \cup B$ incidentní s hranami R tvoří vrcholové pokrytí velikosti $c(R)$
     - naopak nové hrany incidentní s vrcholy z vrcholového pokrytí $C \subseteq A \cup B$ grafu G tvoří řez kapacity $|C|$ $\boxtimes$

- PŘÍKLAD:



2) HALLOVA VĚTA:

- MĚJME KONEČNÉ MNOŽINY X A I
- MNOŽINOVÝ SYSTÉM $\mathcal{M}$ JE $(M_i : i \in I)$, KDE $M_i \subseteq X$
  - ↳ MNOŽINY M_i NEMUSÍ BÝT NUTNĚ RŮZNÉ
- SYSTÉM RŮZNÝCH REPREZENTANTŮ (SRR) PRO $\mathcal{M}$ JE PROSTÉ ZOBRAZENÍ $f : I \to X$ TAKOVÉ, ŽE $\forall i \in I : f(i) \in M_i$
  - TEDY f JE VÝBĚR JEDNOHO PRVKU Z KAŽDÉ M_i TAKOVÝ, ŽE ŽÁDNÝ PRVEK NEVYBEREME VÍCKRÁT

- INCIDENČNÍM GRAFEM SYSTÉMU $\mathcal{M}$ JE BIPARTITNÍ GRAF $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, E)$, KDE $E = \{\{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\}$
- VŠIMNĚME SI, ŽE $\mathcal{M}$ MÁ SRR $\Leftrightarrow$ $G_{\mathcal{M}}$ OBSAHUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|I|$
- VĚTA 4 (HALLOVA VĚTA):

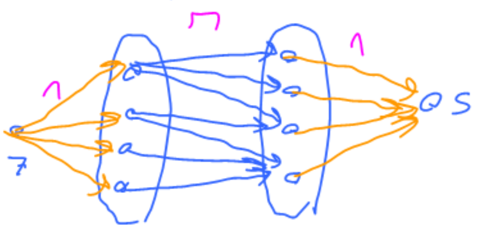
$$\mathcal{M} \text{ MÁ SRR} \Leftrightarrow \underbrace{\forall J \subseteq I : \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|}_{\text{HALLOVA PODMÍNKA}}$$

  - TEDY OČIVIDNĚ NUTNÁ PODMÍNKA PRO EXISTENCI SRR JE I DOSTAČUJÍCÍ
  - TAKÉ ZVANÉ „HALL'S MARRIAGE THEOREM", DOKÁZAL PHILIP HALL (1904–1982) V ROCE 1935

- DK:

(1) $\Rightarrow$:
- NECHŤ PRO $\mathcal{M}$ EXISTUJE SRR f
- ZVOLME $J \subseteq I$ A UVAŽME $\{f(j) : j \in J\}$
- MÁME $\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \underset{f(j) \in M_j \text{ PRO } \forall j \in J}{\geq} |\{f(j) : j \in J\}| \underset{f \text{ JE PROSTÉ}}{=} |J|$ A TEDY PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA

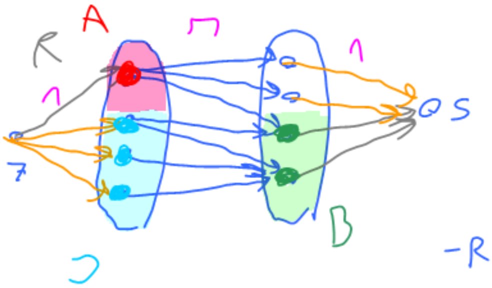
(2) $\Leftarrow$: NECHŤ PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA, CHCEME NAJÍT SRR
- Z $G_{\mathcal{M}}$ VYTVOŘÍME SÍŤ PŘIDÁNÍM ZDROJE z A HRAN (z, i) PRO $i \in I$, PŘIDÁNÍM STOKU s A HRAN (x, s) PRO $x \in X$, ORIENTACÍ HRAN Z I DO X A PŘIDÁNÍM KAPACIT 1 PRO NOVÉ HRANY A $m := |I| + |X|$ PRO STARÉ



- PODLE VĚTY 1 $\exists$ V SÍTI MAX. TOK g A MIN. ŘEZ R S $w(g) = c(R)$
- PODLE VĚTY 2 JE TOK g CELOČÍSELNÝ

– Z VOLBY $\mathcal{M}$ VÍME, ŽE ŘEZ R POUŽÍVÁ JEN NOVÉ HRANY

– Z VOLBY KAPACIT A CELOČÍSELNOSTI g PO KAŽDÉ HRANĚ TEČE 0 NEBO 1



– DEFINUJME $A = \{i : (z, i) \in R\}$

$B = \{x : (x, s) \in R\}$

$J = I \setminus A$

– R JE ŘEZ $\Rightarrow$ HRANY Z J VEDOU JEN DO B

$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} M_j \subseteq B$

$\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|$ PODLE HALLOVY PODMÍNKY

– KAPACITA ŘEZU R TAK SPLŇUJE

$$c(R) = |A| + |B| = |I| - |J| + |B| \geq |I| - |J| + \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |I|$$

KAPACITY NOVÝCH HRAN JSOU 1

$J = I \setminus A$

PO KAŽDÉ HRANĚ V g TEČE 0 NEBO 1

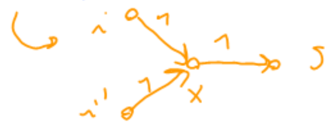
– PROTOŽE $w(g) = c(R)$, TAK VELIKOST TOKU g JE ASPOŇ $|I|$

– DEFINUJEME-LI $f : I \to X$ PŘEDPISEM $f(i) = X$, KDE $g(i, X) = 1$, PAK

– f JE ZOBRAZENÍ, PROTOŽE $w(g) \geq |I|$ A $g(e) \in \{0,1\}$

f BUDE SRR PRO $\mathcal{M}$

– f JE PROSTÉ, PROTOŽE JINAK TOK VELIKOSTI ≥ 2 NEMÁ KUDY ODTÉCT DO S



– $f(i) \in M_i$, PROTOŽE $(i, X) \in E(G_{\mathcal{M}}) \Leftrightarrow X \in M_i$ $\boxtimes$

– POZNÁMKY K HALLOVĚ VĚTĚ:

– SPOUSTA APLIKACÍ

– S AXIOMEM VÝBĚRU LZE DOKÁZAT VARIANTU S KONEČNÝMI M_i A NEKONEČNÝMI I, X

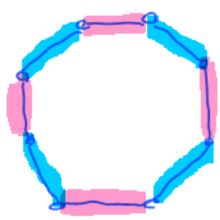
– S NEKONEČNÝMI M_i, I A X HALLOVA VĚTA PLATIT NEMUSÍ

– HALLOVA PODMÍNKA MÁ EXPONENCIÁLNĚ MNOHO PODMÍNEK, ALE SRR LZE POMOCÍ TOKŮ NAJÍT V POLYNOMIÁLNÍM ČASE

3) ROZŠIŘOVÁNÍ LATINSKÝCH OBDÉLNÍKŮ:

– **DŮSLEDEK 1:** V KAŽDÉM BIPARTITNÍM GRAFU $G = (A \cup B, E)$ S $E \neq \emptyset$ A $\deg_G(x) \geq \deg_G(y)$ PRO KAŽDÉ $x \in A$, $y \in B$ EXISTUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|A|$

= STUPEŇ VRCHOLU y V GRAFU G



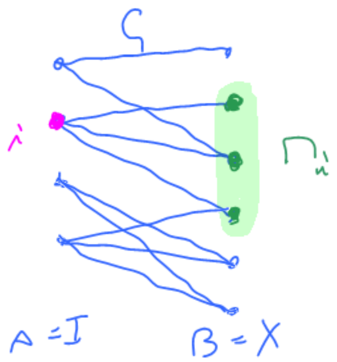
– ITEROVÁNÍM DŮSLEDKU 1 NA k-REGULÁRNÍM BIPARTITNÍM GRAFU G LZE ROZLOŽIT $E(G)$ NA k DISJUNKTNÍCH PÁROVÁNÍ

TEDY VŠECHNY STUPNĚ JSOU ROVNY k

– TO PROTO, ŽE PAK $k \cdot |A| = |E| = k \cdot |B|$

- DK:

- UVAŽME MNOŽINOVÝ SYSTÉM $M = (M_i : i \in I = A)$, KDE $M_i \subseteq X = B$ JE SOUSEDSTVÍ VRCHOLU $i \in A$ V GRAFU G (TEDY $M_i = \{x : \{i,x\} \in E\}$)
  - V M PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA:



- PRO $J \subseteq I$ JE $\bigcup_{j \in J} M_j$ MNOŽINA VRCHOLŮ Z B, KTERÉ MAJÍ ≥ 1 SOUSEDA V J
- OZNAČME $k_1 = \min_{j \in J} \deg_G(j)$ A $k_2 = \max_{x \in \bigcup_{j \in J} M_j} \deg_G(x)$
- Z PŘEDPOKLADŮ PLATÍ $k_1 \geq k_2$
- POČET Z HRAN MEZI J A $|\bigcup_{j \in J} M_j|$ V G SPLŇUJE $k_1 \cdot |J| \leq Z \leq k_2 \cdot |\bigcup_{j \in J} M_j|$
  A Z $k_1 \geq k_2$ JE TAK $|J| \geq |\bigcup_{j \in J} M_j|$ $\Rightarrow$ HALLOVA PODMÍNKA PLATÍ

HALLOVA VĚTA

- VĚTA 4 $\Rightarrow$ $\exists$ SRR f PRO M A Z DEFINICE M JE f PÁROVÁNÍ V $G = G_M$ VELIKOSTI $|A|$ ⊠

- **LATINSKÝ OBDÉLNÍK** TYPU $k \times m$ PRO $k \leq m$ JE TABULKA S k ŘÁDKY A m SLOUPCI VYPLNĚNÁ SYMBOLY $1, \dots, m$ TAK, ŽE SE V ŽÁDNÉM ŘÁDKU ANI SLOUPCI ŽÁDNÝ SYMBOL NEOPAKUJE

1	2	3	4	5	6
3	1	4	6	2	5
4	3	6	5	1	2

- **VĚTA 5**:
  KAŽDÝ LATINSKÝ OBDÉLNÍK TYPU $k \times m$ LZE DOPLNIT NA LATINSKÝ ČTVEREC ŘÁDU m

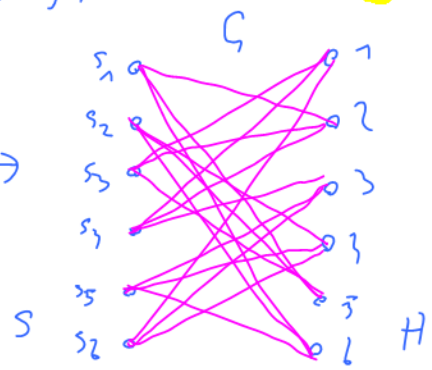
- DK:
  - MĚJME LATINSKÝ OBDÉLNÍK O TYPU $k \times m$, BÚNO $k < m$
  - ROZŠÍŘÍME O NA $k+1$ ŘÁDKŮ
  - UVAŽME BIPARTITNÍ GRAF $G = (S \cup H, E)$, KDE $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ JE MNOŽINA SLOUPCŮ O, $H = \{1, \dots, m\}$ JE MNOŽINA HODNOT, ZE KTERÝCH BUDEME VYPLŇOVAT $(k+1)$-NÍ ŘÁDEK A $E = \{\{s_i, x\} : x \notin s_i\}$

x NENÍ VE SLOUPCI s_i

PŘÍKLAD:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	2	3	4	5	6
3	1	4	6	2	5
4	3	6	5	1	2

$m = 6$, $k = 3$



– PRO KAŽDÉ $s_i \in S$ PLATÍ $\deg_G(s_i) = m-k$, PROTOŽE VE SLOUPCI s_i NENÍ POUŽITO PRÁVĚ $m-k$ HODNOT Z H

– PRO KAŽDÉ $x \in H$ PLATÍ, ŽE $\deg_G(x) = m-k$, PROTOŽE x SE VYSKYTUJE V KAŽDÉM Z k ŘÁDKŮ PRÁVĚ JEDNOU A POKAŽDÉ V JINÉM SLOUPCI A TEDY x CHYBÍ V PRÁVĚ $m-k$ SLOUPCÍCH OBDÉLNÍKU O

– JSOU SPLNĚNY PŘEDPOKLADY DŮSLEDKU 1, PODLE KTERÉHO V G EXISTUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|S| = m$

- TOTO PÁROVÁNÍ DÁVÁ $(k+1)$-NÍ ŘÁDEK ROZŠIŘUJÍCÍ O NA LATINSKÝ OBDÉLNÍK TYPU $(k+1) \times m$ $\boxtimes$