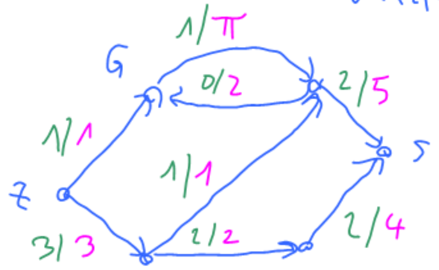
TOKY V SÍTÍCH:

- **SÍŤ** JE ČTVEŘICE (G, z, s, c), KDE $G = (V, E)$ JE ORIENTOVANÝ GRAF (TEDY $E \subseteq V \times V$), $z \in V$ JE **ZDROJ**, $s \in V$ JE **STOK** (PLATÍ $z \neq s$) A $c: E \to \mathbb{R}_0^+$. JE DOVOLENO ↻ I ⟲
  HODNOTU $c(e)$ NAZÝVÁME **KAPACITOU** HRANY $e \in E$
- **TOK** V SÍTI $(G = (V, E), z, s, c)$ JE $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ SPLŇUJÍCÍ NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY:
  a) $\forall e \in E: 0 \leq f(e) \leq c(e)$ (VELIKOST TOKU NA HRANĚ JE OMEZENÁ KAPACITOU)
  b) $\forall u \in V \setminus \{z, s\}: \sum_{v: (u,v) \in E} f(u,v) - \sum_{v: (v,u) \in E} f(v,u) = 0$

  (**1. KIRCHHOFFŮV ZÁKON** - CO PŘITÉKÁ DO VRCHOLU $v \neq z, s$ MUSÍ ODTÉCT A OBRÁCENĚ)
- **VELIKOST TOKU** f JE $w(f) = \sum_{v: (z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v: (v,z) \in E} f(v,z)$
- PŘÍKLAD:



KAPACITY HRAN c
TOK f
VELIKOST TOKU f JE $w(f) = 4$

- CHCEME NALÉZT TOK MAXIMÁLNÍ VELIKOSTI
  - MOTIVACE: VODA V TRUBKÁCH, DATOVÝ PŘENOS, PENĚŽNÍ TOKY, DOPRAVNÍ SÍTĚ...
  - EXISTUJE VŮBEC MAXIMÁLNÍ TOK? (TOKŮ JE NEKONEČNĚ MNOHO A $f(e) \in \mathbb{R}$)
- **TVRZENÍ 1**:
  PRO KAŽDOU SÍŤ EXISTUJE MAXIMÁLNÍ TOK
- DŮK (NÁČRT):
  - Z ANALÝZY VÍME, ŽE SPOJITÁ FUNKCE NA KOMPAKTNÍ MNOŽINĚ NABÝVÁ MAXIMA
  - MNOŽINA $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$ VŠECH TOKŮ JE KOMPAKTNÍ A FUNKCE $w: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ JE SPOJITÁ $\boxtimes$
- DÁLE UVIDÍME, TOKY SOUVISÍ S ŘEZY V SÍTI
- **ŘEZEM V SÍTI** (G, z, s, c) JE $R \subseteq E$ TAKOVÁ, ŽE KAŽDÁ ORIENTOVANÁ CESTA ZE ZDROJE z DO STOKU s POUŽÍVÁ ASPOŇ JEDNU HRANU Z R
  - SPECIÁLNĚ HRANY VYCHÁZEJÍCÍ ZE z ČI HRANY VCHÁZEJÍCÍ DO s TVOŘÍ ŘEZ
- **KAPACITA ŘEZU** R JE $c(R) = \sum_{e \in E} c(e)$
- ŘEZŮ JE JEN KONEČNĚ MNOHO ⇒ JISTĚ EXISTUJE ŘEZ MINIMÁLNÍ KAPACITY

– NYNÍ VYSLOVÍME DŮLEŽITÝ VÝSLEDEK O TOCÍCH

– **VĚTA 1** (**HLAVNÍ VĚTA O TOCÍCH**):

VELIKOST MAXIMÁLNÍHO TOKU = KAPACITA MINIMÁLNÍHO ŘEZU

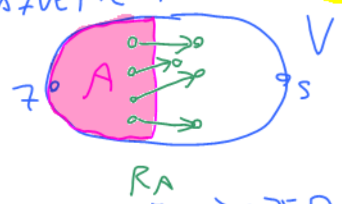
NEBOLI PRO KAŽDOU SÍŤ PLATÍ: $\max w(f) = \min c(R)$

f TOK, R ŘEZ

– PŘED SAMOTNÝM DŮKAZEM UVEDEME NĚKOLIK UŽITEČNÝCH POJMŮ A TVRZENÍ

– ZAČNEME PODROBNĚJŠÍM STUDIEM ŘEZŮ

– PRO $A \subseteq V$, KDE $z \in A$ A $s \notin V$, NAZVEME MNOŽINU $R_A = \{e = (u,v) \in E : u \in A, v \notin A\}$ **ELEMENTÁRNÍM ŘEZEM**



– VŠIMNĚME SI, ŽE R_A JE SKUTEČNĚ ŘEZEM, PROTOŽE KAŽDÁ ORIENTOVANÁ CESTA ZE z DO s OBSAHUJE HRANU Z R_A (MUSÍ OPUSTIT A)

– **POZOROVÁNÍ 1**:

KAŽDÝ ŘEZ R OBSAHUJE ELEMENTÁRNÍ ŘEZ

DK:

– ZVOLME A JAKO MNOŽINU VRCHOLŮ DOSAŽITELNÝCH PO ORIENTOVANÉ CESTĚ ZE ZDROJE V GRAFU $(V, E \setminus R)$

– POTOM $z \in A$, $s \notin A$, PROTOŽE R JE ŘEZ $\Rightarrow R_A$ EXISTUJE

– $(u,v) \in R_A \Leftrightarrow u \in A, v \notin A \Rightarrow (u,v) \in R$

KDYBY $(u,v) \notin R$, PAK $v \in A$, PROTOŽE JE DOSAŽITELNÉ ZE z PO ORIENTOVANÉ CESTĚ

– TEDY $R_A \subseteq R$ $\boxtimes$

– **POZOROVÁNÍ 2**:

KAŽDÝ V INKLUZI MINIMÁLNÍ ŘEZ R JE ELEMENTÁRNÍ

↳ NEBOLI $R \setminus \{e\}$ NENÍ ŘEZEM PRO $\forall e \in R$

DK:

– PODLE POZOROVÁNÍ 1 MUSÍ R OBSAHOVAT ELEMENTÁRNÍ ŘEZ $R_A \subseteq R$ $\boxtimes$

– Z MINIMALITY PLATÍ $R = R_A$

– NYNÍ UVEDEME POSLEDNÍ POMOCNÝ VÝSLEDEK PŘED DŮKAZEM VĚTY 1

– **LEMMA 1:**
JE-LI f TOK A R_A ELEMENTÁRNÍ ŘEZ, PAK PLATÍ

$$w(f) = \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (v,u)\in E}} f(v,u)$$

DK:

– $w(f) = \sum_{u:(z,u)\in E} f(z,u) - \sum_{u:(u,z)\in E} f(u,z)$

DEFINICE $w(f)$

– PRO $u\in A, u\neq z$ MÁME $0 = \sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$

1. KIRCHHOFFŮV ZÁKON PRO f

– DOHROMADY DOSTÁVÁME:

$$w(f) = \sum_{u\in A} \underbrace{\left(\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u) \right)}_{= \begin{cases} 0 & \text{PRO } u\neq z \\ w(f) & \text{PRO } u = z \end{cases}} =$$

ROZDĚLIT NA PŘÍPADY

$$= \underbrace{\sum_{\substack{u,v\in A\\ (u,v)\in E}} \left(f(u,v) - f(u,v) \right)}_{\substack{=0,\text{ PROTOŽE LZE PROHODIT } u \text{ A } v \text{ A}\\ \text{SPÁROVAT TOK PŘÍRŮSTKY S ÚBYTKY}}} + \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (v,u)\in E}} f(v,u) \qquad \boxtimes$$

– DK VĚTY 1:

– CHCEME UKÁZAT $\max_{f \text{ TOK}} w(f) = \min_{R \text{ ŘEZ}} c(R)$ $\Rightarrow$ JE TŘEBA UKÁZAT 2 NEROVNOSTI

(i) „$\le$": CHCEME UKÁZAT $w(f)\le c(R)$

– MĚJME LIBOVOLNÝ TOK f A ŘEZ R,

– PODLE POZOROVÁNÍ 1 ŘEZ R OBSAHUJE ELEMENTÁRNÍ ŘEZ R_A PRO NĚJAKÉ $A\subseteq V$, $z\in A$, $s\notin A$, A PODLE LEMMA 1 PLATÍ

$$w(f) = \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (v,u)\in E}} f(v,u) \underset{\substack{f(e)\ge 0\\ \text{PRO } \forall e\in E}}{\le} \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (u,v)\in E}} f(u,v) \underset{\substack{f(e)\le c(e)\\ \text{PRO } \forall e\in E}}{\le} \sum_{\substack{u\in A, v\notin A\\ (u,v)\in E}} c(u,v) \underset{\substack{\text{DEFINICE}\\ \text{KAPACITY}\\ \text{ŘEZU}}}{=} c(R_A) \le$$

$$\underset{R_A\subseteq R}{\le} \underline{c(R)}$$

(ii) „⇐":

- mějme tok f
- pro libovolnou cestu $P = (z = v_0, v_1, \dots, v_k)$ definujme číslo ε_P jako minimum z $\begin{cases} c(e) - f(e) & \text{pro } e = (v_i, v_{i+1}) \in E \text{ „po směru } P\text{"} \\ f(e) & \text{pro } e = (v_{i+1}, v_i) \in E \text{ „proti směru } P\text{"} \end{cases}$ $i = 0, \dots, k-1$

ne nutně orientovanou

- P je zlepšující cestou, pokud $v_k = s$ a $\varepsilon_P > 0$
- ukážeme, že f je maximální $\Leftrightarrow$ pro f $\nexists$ zlepšující cesta:

1) „⇒" pokud $\exists$ zlepšující cesta P, pak definujme $f' : E \to \mathbb{R}_0^+$ jako

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon_P & e = (v_i, v_{i+1}) \in E \\ f(e) - \varepsilon_P & e = (v_{i+1}, v_i) \in E \\ f(e) & \text{jinak} \end{cases}$$

- potom f' je tok a platí $w(f') = w(f) + \varepsilon_P > w(f)$ — stačí ověřit podmínky z definice toku

$\Rightarrow f$ není maximální

2) „⇐" pokud $\nexists$ zlepšující cesta, pak zvolme

$A = \{z\} \cup \{u \in V : \exists \text{ cesta } P \text{ mezi } z \text{ a } u \text{ splňující } \varepsilon_P > 0\}$ a tedy $\exists$ elementární řez R_A

- $\nexists$ zlepšující cesta $\Rightarrow s \notin A$ a
- pro $\forall e = (u,v) \in R_A$, $u \in A, v \notin A$ je $f(e) = c(e)$ a pro $\forall e = (v,u) \in E$, $u \in A, v \notin A$ je $f(e) = 0$

jinak $f(e) < c(e)$ a tedy $v \in A$ z definice A

jinak opět $v \in A$

- podle **Lemma 1** platí

$$w(f) = \underbrace{\sum_{\substack{u \in A, v \notin A \\ (u,v) \in E}} f(u,v)}_{= c(u,v)} - \underbrace{\sum_{\substack{u \in A, v \notin A \\ (v,u) \in E}} f(v,u)}_{=0} = \sum_{e \in R_A} c(e) = c(R_A)$$

definice kapacity řezu

- čili pro f existuje řez R_A s $w(f) = c(R_A)$ a tedy podle části (i) je f maximální

- podle **tvrzení 1** $\exists$ max. tok f a podle (ii) k němu $\exists$ řez R s $w(f) = c(R)$
- podle (i) je R minimální ☒

- dokonce z důkazu dostáváme algoritmus na nalezení max. toku

- **Fordův-Fulkersonův algoritmus**:

1) nastav $f(e) = 0$ pro $\forall e \in E$
2) dokud $\exists$ zlepšující cesta P, vylepšuj po ní tok o ε_P
3) stávající tok f vrať jako maximální

- VĚTA 2 (VĚTA O CELOČÍSELNOSTI):
  JSOU-LI KAPACITY CELOČÍSELNÉ, PAK F.F. NAJDE MAX. TOK PO KONEČNĚ MNOHA KROCÍCH A NAVÍC MÁ TAKOVÝ TOK CELOČÍSELNOU VELIKOST

  DK: TOK SE VŽDY VYLEPŠÍ O CELÉ ČÍSLO $\varepsilon_P > 0$ A $w(f) < \infty$

- EXISTUJÍ SÍTĚ S IRACIONÁLNÍMI KAPACITAMI, NA KTERÝCH F.F. ALGORITMUS NEDOBĚHNE V KONEČNÉM POČTU KROKŮ (A ANI NEKONVERGUJE KE SPRÁVNÉMU VÝSLEDKU)

- V SÍTÍCH S CELOČÍSELNÝMI KAPACITAMI MÁ F.-F. ALGORITMUS ČASOVOU SLOŽITOST $O(w(f) \cdot (|V|+|E|))$, KDE f JE MAXIMÁLNÍ TOK
  - TO PROTO, ŽE V KAŽDÉM KROKU SE TOK VYLEPŠÍ O ≥ 1 A NALÉZT ZLEPŠUJÍCÍ CESTU JDE V ČASE $O(|V|+|E|)$

- F.F. ALGORITMUS NESPECIFIKUJE, JAKÉ ZLEPŠUJÍCÍ CESTY VYBÍRAT
  - VYBÍRÁME-LI NEJKRATŠÍ, DOSTANEME TZV. EDMONDSŮV-KARPŮV ALGORITMUS PRO NALEZENÍ TOKU MAXIMÁLNÍ VELIKOSTI, KTERÝ MÁ ČASOVOU SLOŽITOST $O(|V| \cdot |E|^2)$