EXISTENCE KONEČNÝCH PROJEKTIVNÍCH ROVIN:

EXISTUJÍ $\iff m$ JE MOCNINA PRVOČÍSLA A JSOU URČENY JEDNOZNAČNĚ AŽ NA IZOMORFISMUS

- **VĚTA 1:** POKUD EXISTUJE ALGEBRAICKÉ TĚLESO O m PRVCÍCH, POTOM EXISTUJE KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m
- KONSTRUKCE FUNGUJE NAD KAŽDÝM TĚLESEM A NAPŘÍKLAD NAD $\mathbb{R}$ DÁVÁ REÁLNOU PROJEKTIVNÍ ROVINU
- DK:
  - MĚJME TĚLESO $\mathbb{K}$ (VELIKOSTI m), ZAVEDEME NA $\mathbb{K}^3$ EKVIVALENCI $\sim$ PŘEDPISEM $(x,y,z) \sim (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ PRO KAŽDÉ $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ A $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
  - BODY PROJEKTIVNÍ ROVINY = TŘÍDY EKVIVALENCE $\sim$ NA $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$
    - POČET BODŮ $= \dfrac{m^3-1}{m-1} = \underline{\underline{m^2+m+1}}$

      m^3-1 = VELIKOST $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, PROTOŽE $|\mathbb{K}| = m$

      $m-1$ = VELIKOST KAŽDÉ TŘÍDY V $\sim$, PROTOŽE $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ A $|\mathbb{K} \setminus \{0\}| = m-1$
  - PŘÍMKY PROJEKTIVNÍ ROVINY:
    - PRO KAŽDÉ $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ DEFINUJEME PŘÍMKU $P_{a,b,c} = \{[(x,y,z)]_\sim : (x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : ax+by+cz=0\}$

      $P_{a,b,c}$ JE MNOŽINA TŘÍD EKVIVALENCE $\sim$
    - PLATÍ, ŽE $(a,b,c) \sim (a',b',c') \iff P_{a,b,c} = P_{a',b',c'}$

      $\Rightarrow$ MÁME m^2+m+1 PŘÍMEK
  - OVĚŘME AXIOMY (A1), (A2), (A3)
  - (A1):
    - MĚJME DVA RŮZNÉ BODY (x,y,z) A (x',y',z')
    - POTOM $\operatorname{RANK}\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = 2$, PROTOŽE $(x,y,z) \not\sim (x',y',z')$
    - PŘÍMKA OBSAHUJÍCÍ (x,y,z) A (x',y',z') ODPOVÍDÁ JÁDRU TÉTO MATICE
    - JÁDRO MÁ DIMENZI 1 $\Rightarrow$ EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST PŘÍMKY

      DIM > 0, DIM < 2
  - (A2):
    - DVĚ RŮZNÉ PŘÍMKY $P_{a,b,c}$ A $P_{a',b',c'}$ URČUJÍ JEDNOZNAČNĚ BOD V JEJICH PRŮNIKU
    - ANALOGICKY Z MATICE $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$
  - (A3):
    - STAČÍ ZVOLIT $C := \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$
    - KAŽDÁ TROJICE BODŮ Z C JE PAK LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ A TEDY BODY Z C JSOU V OBECNÉ POLOZE $\boxtimes$

- LATINSKÝ ČTVEREC ŘÁDU $n \in \mathbb{N}$ JE TABULKA $n \times n$ ČÍSEL Z $\{1, \dots, n\}$, VE KTERÉ SE ŽÁDNÉ ČÍSLO NEOPAKUJE V ŽÁDNÉM ŘÁDKU ANI SLOUPCI
  - DŘÍVE SE LATINSKÉ ČTVERCE VYPLŇOVALY PÍSMENY LATINKY, PROTO SE JIM ŘÍKÁ LATINSKÉ

- LATINSKÉ ČTVERCE L, L' STEJNÉHO ŘÁDU JSOU **ORTOGONÁLNÍ**, POKUD PRO KAŽDÉ $l, l' \in \{1, \dots, n\}$ EXISTUJÍ $i, j \in \{1, \dots, n\}$ TAKOVÉ, ŽE $L_{ij} = l$, $L'_{ij} = l'$
  - ZAPISUJEME $L \perp L'$

- MOTIVACE POCHÁZÍ OD L. EULERA A JEHO „PROBLÉMU 36 DŮSTOJNÍKŮ": LZE 6 PLUKŮ, KDE KAŽDÝ PLUK SESTÁVÁ Z 6 ČLENŮ RŮZNÝCH HODNOSTÍ, USPOŘÁDAT DO ČTVERCE 6×6 TAK, ABY V ŽÁDNÉM SLOUPCI ANI ŘÁDKU NEBYLI ČLENOVÉ STEJNÉ HODNOSTI ČI ZE STEJNÉHO PLUKU? - NEBOLI $\exists$ 2 ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE ŘÁDU 6?

- PŘÍKLAD:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow L \perp L' \quad \begin{pmatrix} 1,1 & 2,2 & 3,3 \\ 2,3 & 3,1 & 1,2 \\ 3,2 & 1,3 & 2,1 \end{pmatrix}$$

DVA ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE ŘÁDU 3, KAŽDÝ Z $3^2 = 9$ PÁRŮ $(l, l') \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ SE VYSKYTUJE NA NĚJAKÉ POZICI (i, j) V $L \perp L'$

- **POZOROVÁNÍ 1**: PRO ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE L, L' ŘÁDU n A PÁR $(l, l') \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ JE POZICE (i, j) S $L_{ij} = l$, $L'_{ij} = l'$ URČENA JEDNOZNAČNĚ. ⊠

- DK: POČET PÁRŮ (l, l') JE n^2, STEJNĚ JAKO POČET PÁRŮ (i, j)

- **POZOROVÁNÍ 2**: JE-LI $L = (L_{ij})_{i,j=1}^{n}$ LATINSKÝ ČTVEREC A $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ PERMUTACE, TAK POTOM $\pi(L) := (\pi(L_{ij}))_{i,j=1}^{n}$ JE LATINSKÝ ČTVEREC STEJNÉHO ŘÁDU. ⊠

$\Rightarrow$ BÚNO PRVNÍ ŘÁDEK JE VŽDY $1, 2, \dots, n$

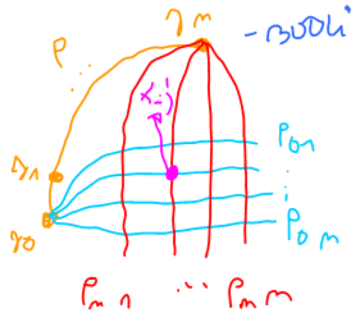
$\Rightarrow$ JE-LI $L \perp L'$, PAK $\pi(L) \perp L'$

- **DŮSLEDEK 1**: POČET **NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍCH** (TEDY PO DVOU ORTOGONÁLNÍCH) ČTVERCŮ ŘÁDU $n \in \mathbb{N}$ JE NANEJVÝŠ $n - 1$.

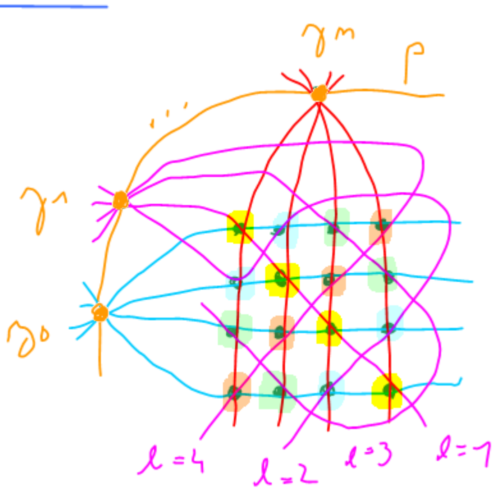
- DK:
  - BÚNO $L_1, \dots, L_m$ NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE ŘÁDU n
  - BÚNO PRVNÍ ŘÁDKY JSOU $1, 2, \dots, n$ (PODLE POZOROVÁNÍ 2)
    - NA POZICI $(2,1)$ MOHOU BÝT JEN ČÍSLA $2, 3, \dots, n$ A KAŽDÉ Z NICH JE V NANEJVÝŠ JEDNOM ČTVERCI L_k
      ↳ PODLE POZOROVÁNÍ 1, PROTOŽE KAŽDÝ PÁR (l, l) JE NA POZICI $(1, l)$

$\Rightarrow \underline{\underline{m \leq n - 1}}$ ⊠

- NYNÍ DÁME DO SOUVISLOSTI ORTOGONÁLNÍ ČTVERCE A KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY
- **VĚTA 2**: KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU $m \geq 2$ EXISTUJE $\Leftrightarrow$ EXISTUJE $m-1$ NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍCH LATINSKÝCH ČTVERCŮ ŘÁDU m
  - <u>DK:</u>
    - (i) $\Rightarrow$:
      - DÁNA KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA $(X, \mathcal{P})$ ŘÁDU $m \geq 2$
      - CHCEME SESTROJIT NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE $L_1, \dots, L_{m-1}$ ŘÁDU m
      - UVAŽME LIBOVOLNOU PŘÍMKU $P = \{y_0, \dots, y_m\} \in \mathcal{P}$
      - KAŽDÝM BODEM y_i PROCHÁZÍ m DALŠÍCH PŘÍMEK $P_{i1}, \dots, P_{im}$
      - PRO KAŽDÉ $i, j \in \{1, \dots, m\}$ OZNAČME JAKO x_{ij} PRŮNIK P_{0i} A P_{mj}
      - BODŮ x_{ij} JE m^2, BODŮ $y_0, \dots, y_m$ JE $m+1$ $\Rightarrow$ MÁME VŠECH m^2+m+1 BODŮ Z X
        - PŘÍMKY OBSAHUJÍCÍ BODY y_0 A y_m SLOUŽÍ K „URČENÍ SOUŘADNIC“
        - PŘÍMKY OBSAHUJÍCÍ BODY $y_1, \dots, y_{m-1}$ BUDOU ODPOVÍDAT LATINSKÝM ČTVERCŮM $L_1, \dots, L_{m-1}$



- PRO $k \in \{1, \dots, m-1\}$ A $l \in \{1, \dots, m\}$ SE PŘÍMKA $P_{k,l}$ MUSÍ PROPLÉST MŘÍŽKOU $m \times m$ URČENOU PŘÍMKAMI Z y_0 A y_m – TOTO PROPLÉTÁNÍ URČÍ POZICE PRVKU l VE ČTVERCI L_k
- FORMÁLNĚ – NASTAVÍME $(L_k)_{ij} = l \Leftrightarrow x_{ij} \in P_{kl}$ PRO $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1, \dots, m$
- <u>PŘÍKLAD:</u>
  -



$\longrightarrow$

L_1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

- ukážeme, že $L_1, \dots, L_{m-1}$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu m
- nějme $k \in \{1, \dots, m-1\}$, na každé pozici (i,j) je v L_k číslo $\ell \in \{1, \dots, m\}$, podle (A1)
- v řádcích L_k se nic neopakuje (tedy $(L_k)_{ij} \neq (L_k)_{ij'}$ pro $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1, \dots, m$, $\forall j' = 1, \dots, m$, $j \neq j'$):
  - sporem − $\exists i, j, j' \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq j'$: $(L_k)_{ij} = (L_k)_{ij'} = \ell$
  - potom $|P_{k\ell} \cap P_{0i}| \geq 2 \Rightarrow$ <u>spor</u> s (A2)
- analogicky se nic neopakuje ve sloupcích L_k
  - kdyby $\exists i, i', j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq i'$: $(L_k)_{ij} = (L_k)_{i'j} = \ell$, pak $|P_{k\ell} \cap P_{mj}| \geq 2$

    ↑ nelze podle (A2)
- pro $k, k' \in \{1, \dots, m-1\}$ s $k \neq k'$ ukážeme, že $L_k \perp L_{k'}$:
  - chceme $\forall \ell, \ell' \in \{1, \dots, m\}\ \exists i, j \in \{1, \dots, m\} : (L_k)_{ij} = \ell$ & $(L_{k'})_{ij} = \ell'$
  - přímky $P_{k\ell}$ a $P_{k'\ell'}$ se podle (A2) protínají v nějakém bodě x_{ij}
  - z konstrukce pak platí $(L_k)_{ij} = \ell$ & $(L_{k'})_{ij} = \ell'$ a tedy $L_k \perp L_{k'}$

(ii) $\Leftarrow$:
- mějme navzájem ortogonální latinské čtverce $L_1, \dots, L_{m-1}$ řádu $m \geq 2$
- zkonstruujeme konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu m
- zvolme $X = \{y_0, \dots, y_m\} \cup \{x_{ij} : i, j = 1, \dots, m\}$
- do množiny $\mathcal{P}$ přidejme přímky $P = \{y_0, \dots, y_m\}$, $P_{0i} = \{y_0, x_{i1}, \dots, x_{im}\}$, $P_{mj} = \{y_m, x_{1j}, \dots, x_{mj}\}$, $P_{k\ell} = \{y_k\} \cup \{x_{ij} : (L_k)_{ij} = \ell\}$ pro $k = 1, \dots, m-1$, $i, j, \ell = 1, \dots, m$
- potom $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina řádu m:
  - stačí ověřit axiomy (A1), (A2), (A3)
- (A3) ($\exists$ 4 body v obecné poloze):
  - stačí vzít $C = \{y_0, y_m, x_{11}, x_{22}\}$ (existuje, protože $m \geq 2$) $\Rightarrow$ <u>(A3) platí</u>
- (A2) (každé 2 přímky se protínají v ≤ 1 bodě):
  - ověřit rozborem případů
  - máme nevlastní přímku P, vodorovné P_{0i}, svislé P_{mj} a šikmé $P_{k\ell}$, $k = 1, \dots, m-1$, $\ell = 1, \dots, m$
- a) nevlastní přímka (A2) splňuje z definice
- b) vodorovná $\cap$ vodorovná $= \{y_0\}$, svislá $\cap$ svislá $= \{y_m\}$
- c) vodorovná $P_{0i} \cap$ svislá $P_{mj} = \{x_{ij}\}$
- d) $|$vodorovná $P_{0i} \cap$ šikmá $P_{k\ell}| = |\{x_{ij} : (L_k)_{ij} = \ell\}| = 1$ (na řádku i má L_k prvek ℓ jednou)
- e) $|$svislá $P_{mj} \cap$ šikmá $P_{k\ell}| = |\{x_{ij} : (L_k)_{ij} = \ell\}| = 1$ (ve sloupci j má L_k prvek ℓ jednou)

- 1) šikmá P_{kl} $\cap$ šikmá $P_{k'l'}$:
  - pokud $k = k'$, pak $P_{kl} \cap P_{k'l'} = \{\gamma_k\}$
  - jinak $|P_{kl} \cap P_{k'l'}| = |\{x_{ij} : (L_k)_{ij} = l \,\&\, (L_{k'})_{ij} = l'\}| = 1$

    protože $L_k \perp L_{k'}$

$\Rightarrow$ (A2) platí

- (A1) (každé 2 body určují přímku):
  - máme m^2+m+1 bodů a m^2+m+1 přímek
  - spočítejme 2 způsoby počet $z := |\{(\{a,b\}, p) : a,b \in X, a \neq b, p \in P, a,b \in p\}|$
  - $z = (m^2+m+1)\binom{m+1}{2}$, protože $\forall p \in P$ přispěje $\binom{m+1}{2}$ páry $\{a,b\}$
  - na druhou stranu každými 2 body prochází podle (A2) ≤ 1 přímka

    a tedy $\binom{m^2+m+1}{2} \geq z$
  - protože $\binom{m^2+m+1}{2} = \binom{m+1}{2}(m^2+m+1)$, tak musí procházet právě 1 přímka každými dvěma body z X $\Rightarrow$ (A1) platí $\boxtimes$

- $\nexists$ konečná projektivní rovina řádu 6, protože $\nexists$ 5 navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu 6
  - $\nexists$ dokonce ani 2 takové čtverce (Tarry, 1900)

    $\Rightarrow$ záporná odpověď na Eulerův problém 36 důstojníků