KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY: (1)

- ZAMĚŘÍME SE NA NOVOU STRUKTURU - VELICE SYMETRICKOU A VZÁCNOU
- BUDE TO MNOŽINOVÝ SYSTÉM (HYPERGRAF - ZOBECNĚNÍ GRAFU, KDE HRANY MOHOU BÝT k-TICE PRO NĚJAKÉ $k \geq 2$)
- APLIKACE I V INFORMATICE - DOZVÍME SE V ČÁSTI O SAMOOPRAVNÝCH KÓDECH
- MOTIVACE PŘICHÁZÍ Z GEOMETRIE
- EUKLEIDOVY AXIOMY -
  1) KAŽDÉ 2 BODY URČUJÍ PŘÍMKU
  2) KAŽDOU ÚSEČKU LZE PRODLOUŽIT NA PŘÍMKU
  3) ZE ZADANÉHO BODU LZE OPSAT KRUŽNICI PROCHÁZEJÍCÍ DRUHÝM ZADANÝM BODEM
  4) VŠECHNY PRAVÉ ÚHLY JSOU STEJNÉ
  5) BODEM LZE K PŘÍMCE VÉST PRÁVĚ 1 ROVNOBĚŽKU

EUKLIDES Z ALEXANDRIE (325-260 PŘ. N.L.) POMOCÍ TĚCHTO AXIOMŮ JE V KNIZE „ZÁKLADY" VYSTAVĚNA GEOMETRIE

- UVAŽME PŘÍMKY JAKO MNOŽINY BODŮ - CO VÝSLEDNÝ MNOŽINOVÝ SYSTÉM $(X,\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, SPLŇUJE?
  - 2 BODY URČUJÍ PŘÍMKU $(\forall x,y \in X, x \neq y \ \exists! P \in \mathcal{P} : \{x,y\} \subseteq P)$
  - 2 PŘÍMKY SE PROTÍNAJÍ V ≤ 1 BODĚ : $\forall P,Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| \leq 1$
- GINO FANO UKÁZAL, ŽE EXISTUJÍ KONEČNÉ OBJEKTY SPLŇUJÍCÍ SILNĚJŠÍ PODMÍNKY
  ↳ $|X| < \infty$

DEFINICE: KONEČNÁ MNOŽINA X A SYSTÉM $\mathcal{P}$ PODMNOŽIN X TVOŘÍ KONEČNOU PROJEKTIVNÍ ROVINU $(\underbrace{X}_{\text{BODY}}, \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{PŘÍMKY}})$ POKUD SPLŇUJE TYTO 3 PODMÍNKY:

(A1) $\forall x,y \in X, x \neq y \ \exists! P \in \mathcal{P} : \{x,y\} \subseteq P$
- KAŽDÉ 2 BODY URČUJÍ PRÁVĚ JEDNU PŘÍMKU

(A2) $\forall P,Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$ → ROVNOST! („NEMÁME ROVNOBĚŽKY")
- KAŽDÉ 2 PŘÍMKY SE PROTÍNAJÍ V PRÁVĚ 1 BODĚ

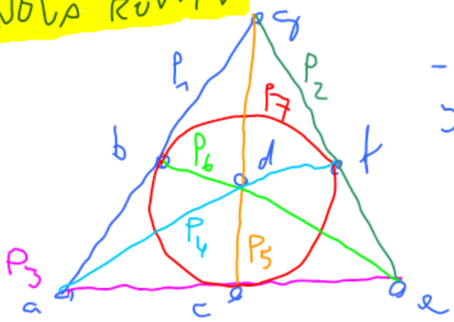
(A3) $\exists C \subseteq X, |C| = 4, \forall P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$
- EXISTUJÍ 4 BODY V OBECNÉ POLOZE

- (A1) A (A2) SAMY O SOBĚ NESTAČÍ, PROTOŽE NEVYLUČUJÍ DEGENEROVANÉ PŘÍPADY:

(VŠECHNY BODY NA PŘÍMCE)

(TÉMĚŘ VŠECHNY BODY NA PŘÍMCE)

- PŘÍKLAD:
  - FANOVA ROVINA (7 BODŮ, 7 PŘÍMEK)



- BODY a,b,c,d JSOU V OBECNÉ POLOZE

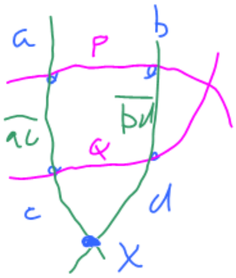
– JEDNOZNAČNĚ URČENOU PŘÍMKU $P \in \mathcal{P}$ S $P \supseteq \{x,y\}$ PRO DANÉ BODY $x,y \in X$ S $x \neq y$ OZNAČÍME JAKO $\overline{xy}$

– TVRZENÍ 1:

V KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINĚ OBSAHUJE KAŽDÁ PŘÍMKA STEJNÝ POČET BODŮ.

– NEBOLI $\forall P,Q \in \mathcal{P}: |P| = |Q|$

DK:



– MĚJME PŘÍMKY $P,Q \in \mathcal{P}$, $P \neq Q$

– UKÁŽEME, ŽE $\exists$ BOD $x \in X$ TAKOVÝ, ŽE $x \notin P$ A $x \notin Q$:

– UVAŽME MNOŽINU C Z (A3), KTERÁ SPLŇUJE $|P \cap C| \le 2$ A $|Q \cap C| \le 2$

– POKUD $C \not\subseteq P \cup Q$, PAK JISTĚ MÁME HLEDANÉ x

– TEDY PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $P \cap C = \{a,b\}$ PRO $a,b,c,d \in X$
$Q \cap C = \{c,d\}$ (4 RŮZNÉ BODY)

– UVAŽME PŘÍMKY $\overline{ac}, \overline{bd} \in \mathcal{P}$

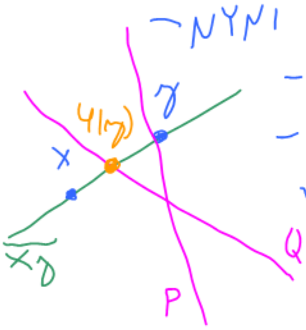
– PODLE (A2) EXISTUJE BOD $x \in \overline{ac} \cap \overline{bd}$

– POTOM $x \notin P$ A $x \notin Q$

A TEDY POKUD $x \in P$, PAK

– PODLE (A2) JE $P \cap \overline{ac} = \{a\}$ A TEDY $x = a$, COŽ NELZE PODLE (A3), PROTOŽE PAK $\{x = a, b, d\} \subseteq \overline{bd}$ A TEDY $|P_2 \cap C| \ge 3$

– ANALOGICKY DOSTANEME $x \notin Q$

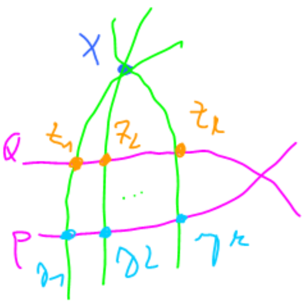


– NYNÍ UKÁŽEME $|P| = |Q|$:

– MĚJME BOD $x \notin P \cup Q$,

– DEFINUJME ZOBRAZENÍ $\varphi: P \to Q$ TAK, ABY $\varphi(y)$ = BOD V PRŮNIKU PŘÍMEK $\overline{xy}$ A Q

– PODLE (A2) JE $\varphi(y)$ URČENÉ JEDNOZNAČNĚ



– φ JE PROSTÉ (A TEDY $|P| \le |Q|$):

– MĚJME $P = \{y_1, \dots, y_k\}$

– POTOM PODLE (A2) KAŽDÁ PŘÍMKA $\overline{xy_i}$ PROTÍNÁ Q V JEDNOM BODĚ z_i

– φ JE PROSTÉ, PROTOŽE $z_i = z_j$ PRO $i \neq j$ BY ZNAMENALO, ŽE $\overline{y_i x} \cap \overline{y_j x}$ OBSAHUJE 2 BODY (x A $z_i = z_j$), COŽ NELZE PODLE (A2)

– ANALOGICKY LZE ZKONSTRUOVAT PROSTÉ $\varphi': Q \to P$
$\Rightarrow |Q| \le |P|$ A TEDY $\underline{|P| = |Q|}$ ☒

– ŘÁD PROJEKTIVNÍ ROVINY $(X, \mathcal{P})$ JE $|P| - 1$ PRO $P \in \mathcal{P}$ (ŘÁD FANOVY ROVINY = 2)

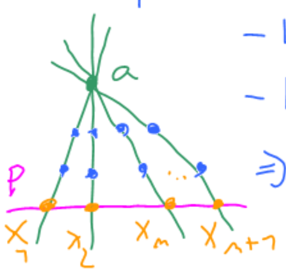
– **TVRZENÍ 2:**
JE-LI $(X, \mathcal{P})$ KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m, PAK PLATÍ:

1) KAŽDÝM BODEM PROCHÁZÍ PRÁVĚ $m+1$ PŘÍMEK,
2) $|X| = m^2 + m + 1$,
3) $|\mathcal{P}| = m^2 + m + 1$.

– DK:

1) MĚJME LIBOVOLNÝ BOD $x \in X$
   - POTOM $\exists$ PŘÍMKA $p \in \mathcal{P}$ TAKOVÁ, ŽE $x \notin p$:
     - BUĎ C MNOŽINA 4 BODŮ $a, b, c, d \in X$ Z (A3)
     - BÚNO $x \notin \{a, b, c\}$
     - POTOM BUĎ $\overline{ab}$ NEBO $\overline{ac}$ NEOBSAHUJE x PODLE (A2)
   - UVAŽME PŘÍMKU $p \in \mathcal{P}$ TAKOVOU, ŽE $x \notin p$
   - BODEM x PROCHÁZÍ ASPOŇ $m+1$ PŘÍMEK:
     - $|p| = m+1$ PODLE TVRZENÍ 1 A PRO KAŽDÉ $y \in p$ MÁME PŘÍMKU $\overline{xy}$ (TYTO PŘÍMKY JSOU PODLE (A2) RŮZNÉ) PROCHÁZEJÍCÍ BODEM x
   - BODEM x PROCHÁZÍ NEJVÝŠ $m+1$ PŘÍMEK:
     - PODLE (A2) KAŽDÁ PŘÍMKA OBSAHUJÍCÍ x PROTÍNÁ p A JE TEDY ZAPOČÍTÁNA MEZI $m+1$ PŘÍMEK $\overline{xy}$ S $y \in p$

2) MĚJME LIBOVOLNOU PŘÍMKU $p \in \mathcal{P}$ A NECHŤ $p = \{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ TVRZENÍ 1
   - PODLE (A3) EXISTUJE BOD $a \in X$ TAKOVÝ, ŽE $a \notin p$
   - $|X| \geq m^2 + m + 1$:
     - KAŽDÁ PŘÍMKA $\overline{ax_i}$ MÁ m BODŮ MIMO a
     - KAŽDÉ 2 PŘÍMKY $\overline{ax_i}$ A $\overline{ax_j}$ PODLE (A2) SDÍLEJÍ JEN BOD a



$$\Rightarrow |X| \geq \underbrace{1}_{\text{ZA BOD } a} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m+1} \left(|\overline{ax_i}| - 1\right)}_{= m} = 1 + (m+1) \cdot m = \underline{\underline{m^2 + m + 1}}$$

   - $|X| \leq m^2 + m + 1$:
     - KAŽDÝ BOD $x \in X \setminus \{a\}$ LEŽÍ NA NĚJAKÉ PŘÍMCE $\overline{ax_i}$, PROTOŽE PŘÍMKA $\overline{ax}$ PROTÍNÁ p V NĚJAKÉM BODĚ x_i PODLE (A2) A PODLE (A1) PAK PLATÍ $\overline{ax} = \overline{ax_i}$

3) PLYNE Z 2) A Z DUALITY (UVIDÍME)

$\boxtimes$

DUALITA KONEČNÝCH PROJEKTIVNÍCH ROVIN:

- „PŘECHOD Z PŘÍMEK NA BODY A Z BODŮ NA PŘÍMKY"
- **DUÁLNÍM MNOŽINOVÝM SYSTÉMEM** K MNOŽINOVÉMU SYSTÉMU $(X, \mathcal{P})$ JE

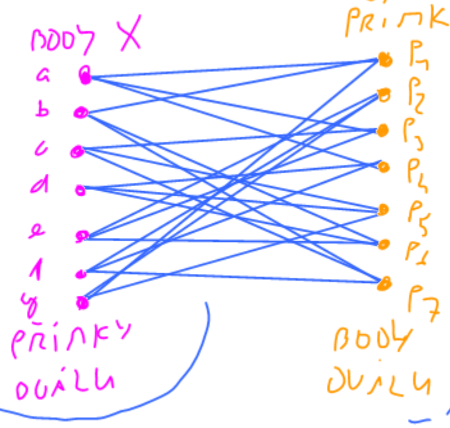
$$(\mathcal{P}, \{\{P \in \mathcal{P} : x \in P\} : x \in X\})$$

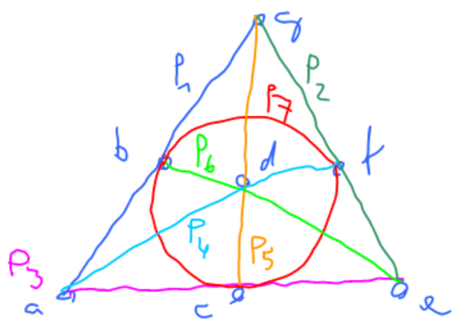
(ZKRÁCENĚ „DUÁL $(X, \mathcal{P})$")

BODY DUÁLU = PŘÍMKY Z $\mathcal{P}$

PŘÍMKY DUÁLU = MNOŽINY PŘÍMEK Z $\mathcal{P}$ OBSAHUJÍCÍ TÝŽ BOD

- **GRAF INCIDENCE**: (PŘÍKLAD PRO FANOVU ROVINU)





HRANY $\{x, P\}$, KDE $x \in P$

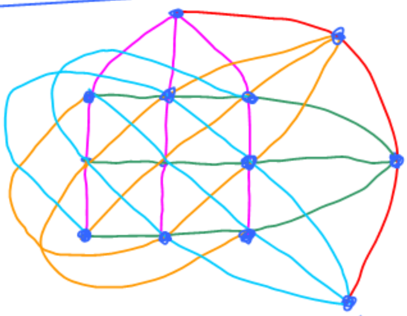
- **TVRZENÍ 3**: DUÁLEM KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY ŘÁDU m JE KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m.

- DK:
  - OVĚŘÍME AXIOMY (A1), (A2), (A3) V DUÁLU K $(X, \mathcal{P})$
  - **(A1)** - CHCEME UKÁZAT, ŽE KAŽDÉ DVA BODY V DUÁLU JEDNOZNAČNĚ URČUJÍ PŘÍMKU V DUÁLU
    - TO JE TOTÉŽ JAKO UKÁZAT, ŽE $\forall P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q \; \exists! \, x \in X : x \in P \cap Q$ - TO JE PŘESNĚ ZNĚNÍ **(A2)** PRO $(X, \mathcal{P})$
    - ↳ POTOM $P, Q \in \{S \in \mathcal{P} : x \in S\}$, TEDY P, Q LEŽÍ V PŘÍMCE DUÁLU JEDNOZNAČNĚ URČENÉ BODEM $x \in X$
  - **(A2)** - CHCEME UKÁZAT, ŽE KAŽDÉ DVĚ PŘÍMKY V DUÁLU SE PROTÍNAJÍ V PRÁVĚ JEDNOM BODU V DUÁLU
    - TO JE TOTÉŽ JAKO UKÁZAT, ŽE $\forall x, y \in X, x \neq y \; \exists! \, P \in \mathcal{P} : \{x, y\} \subseteq P$ - TO JE PŘESNĚ ZNĚNÍ **(A1)** PRO $(X, \mathcal{P})$
    - ↳ POTOM $\{S \in \mathcal{P} : x \in S\} \cap \{S \in \mathcal{P} : y \in S\} = \{\overline{xy}\} = \{P\}$
  - **(A3)** - JE-LI $C = \{a, b, c, d\}$ MNOŽINA Z **(A3)** PRO $(X, \mathcal{P})$, PAK $C' = \{\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{ad}\}$ JE PŘÍSLUŠNÁ MNOŽINA V DUÁLU
    - TO PROTO, ŽE Z KAŽDÉ TROJICE PŘÍMEK MAJÍ DVĚ V PRŮNIKU BOD, KTERÝ NELEŽÍ VE TŘETÍ $\Rightarrow$ ŽÁDNÉ TŘI PŘÍMKY V C' NELEŽÍ V TÉŽE PŘÍMCE V DUÁLU
  - ZACHOVÁNÍ ŘÁDU PLYNE Z **ČÁSTI 1) TVRZENÍ 2**, PROTOŽE VELIKOST DUÁLNÍ PŘÍMKY SE ROVNÁ POČTU PŘÍMEK Z $\mathcal{P}$ PROCHÁZEJÍCÍCH BODEM Z X ☒

- ČÁST 3) Z TVRZENÍ 2 PAK PLYNE PŘÍMO Z ČÁSTI **2)** A **TVRZENÍ 3**

EXISTENCE KONEČNÝCH PROJEKTIVNÍCH ROVIN:

- KROMĚ FANOVY ROVINY ZATÍM NEZNÁME ŽÁDNÉ PŘÍKLADY KONEČNÝCH PROJEKTIVNÍCH ROVIN
- PŘÍKLAD (KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU 3):



$13 = 3^2 + 3 + 1$ BODŮ

13 PŘÍMEK

KAŽDÁ PŘÍMKA MÁ 4 BODY

KAŽDÝ BOD JE OBSAŽEN VE 4 PŘÍMKÁCH

- PRO JAKÁ $m \in \mathbb{N}$ EXISTUJÍ KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY ŘÁDU m?

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
EXISTENCE	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	?

6: DOKÁZAL TARRY (1900)

10: DOKÁZÁNO POMOCÍ POČÍTAČE

- **DOMNĚNKA**: KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY ŘÁDU m EXISTUJÍ $\Leftrightarrow$ m JE MOCNINA PRVOČÍSLA
- STÁLE OTEVŘENÉ
- IMPLIKACE "$\Leftarrow$" JE ZNÁMA (UMÍME JE PRO TAKOVÁ m ZKONSTRUOVAT)
- NAPŘ. PRO $m = 9$ $\exists$ 4 NEIZOMORFNÍ KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY

(EXISTUJÍ $\Leftarrow$ m JE MOCNINA PRVOČÍSLA A JSOU URČENY JEDNOZNAČNĚ AŽ NA IZOMORFISMUS)

- **VĚTA 1**: POKUD EXISTUJE ALGEBRAICKÉ TĚLESO O m PRVCÍCH, POTOM EXISTUJE KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m

- KONSTRUKCE FUNGUJE NAD KAŽDÝM TĚLESEM A NAPŘÍKLAD NAD $\mathbb{R}$ DÁVÁ REÁLNOU PROJEKTIVNÍ ROVINU