VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE A JEJICH APLIKACE:

- PŘIPOMENUTÍ Z MINULA:
  - CHCEME URČIT POČTY $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ NĚJAKÉHO KOMBINATORICKÉHO OBJEKTU
  - PŘIŘADÍME DANÉMU OBJEKTU **VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCI** $a(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$
  - KOEFICIENTY a_n LZE NĚKDY URČIT APLIKOVÁNÍM ZÁKLADNÍCH OPERACÍ (SOUČET, α-NÁSOBEK, NÁSOBENÍ, ...) NA ZÁKLADNÍ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE $\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right.$ PRO $(\underbrace{1,\dots,1}_{n+1},0,0,\dots)$, $\frac{1}{1-x}$ PRO $(1,1,\dots)$ A $(1+x)^n$ PRO $\left.\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\dots\right)\right)$
  - VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE LZE POUŽÍT K **ŘEŠENÍ REKURENCÍ** TYPU $a_{n+k} = \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 a_n$ PRO $\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1}\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$

- ROZŠÍŘÍME SI REPERTOÁR ZÁKLADNÍCH VYTVOŘUJÍCÍCH FUNKCÍ
- PRO $r\in\mathbb{R}$ a $k\in\mathbb{Z}_0^+$ DEFINUJME (ZOBECNĚNÝ) BINOMICKÝ KOEFICIENT JAKO

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} \qquad \left(\text{SPECIÁLNĚ } \binom{r}{0}:=1\right)$$

- ODVOZEN I. NEWTONEM, KDYŽ ODJEL Z CAMBRIDGE NA RODINNÉ PANSTVÍ KVŮLI MORU

- **VĚTA 1 (ZOBECNĚNÁ BINOMICKÁ VĚTA):**
  $\forall r\in\mathbb{R}$ JE $(1+x)^r$ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCÍ POSLOUPNOSTI $\left(\binom{r}{0},\binom{r}{1},\binom{r}{2},\dots\right)$
  A ŘADA $\sum_{i=0}^{\infty}\binom{r}{i}x^i$ KONVERGUJE PRO $\forall x\in(-1,1)$.

- DK (NÁČRT):
  - POUŽIJEME VÝSLEDEK Z MA: FUNKCE f JE ROVNA SVÉMU TAYLOROVĚ ROZVOJI NA OKOLÍ BODU a, NEBOLI

    PRO x NA OKOLÍ a

    $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$

    POKUD $\exists$ VŠECHNY DERIVACE, SOUČET ŘADY KONVERGUJE A ZBYTKY JDOU K NULE

    $$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{PRO } \xi\in(a,x)$$

    (DERIVACE EXISTUJÍ)
  - APLIKUJME NA $f(x)=(1+x)^r$ A $a=0$

    $f(x) = (1+x)^r$ $\qquad f(0) = (1+0)^r = 1$

    $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$ $\qquad f'(0) = r(1+0)^{r-1} = r$

    $f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}$ $\qquad f''(0) = r(r-1)(1+x)^{r-2} = r(r-1)$

    $\vdots$

    $f^{(i)}(x) = r(r-1)\cdots(r-i+1)(1+x)^{r-i}$ $\qquad f^{(i)}(0) = r(r-1)\cdots(r-i+1)$

    PRO $x\in(-1,1)$

    $$\Rightarrow (1+x)^r = 1 + \frac{r}{1!}(x-0) + \frac{r(r-1)}{2!}(x-0)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r}{i}x^i \quad \text{PRO } x\in(-1,1)$$

  - KONVERGENCI LZE OVĚŘIT **PODÍLOVÝM KRITÉRIEM**:

    $$\left|\binom{r}{i}x^i \Big/ \binom{r}{i-1}x^{i-1}\right| = \left|\frac{(r-i+1)x}{i}\right| \xrightarrow{i\to\infty} |x| < 1$$

    ZBYTKY: $\left|\binom{r}{i}\right|\cdot(1+\xi)^{r-i}x^i \xrightarrow{i\to\infty} 0$ PRO $\xi\in(0,x)$, $x<1$

$\boxtimes$

- **DŮSLEDEK 1:**

$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in (-1,1)$ PLATÍ $\dfrac{1}{(1-x)^m} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{m-1} x^i$.

- DK:

$$(1-x)^{-m} \overset{\text{VĚTA 2}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-m}{i} (-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-i+1)}{i!} \cdot (-x)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\cdots(m+i-1)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} x^i =$$

VYTKNUTÍ MINUS JEDNIČEK

$$\binom{m+i-1}{i} = \binom{m+i-1}{m-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{m-1} x^i$$

⊠

- DK 2 (KOMBINATORICKÝ):

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \underbrace{(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\cdots(1+x+x^2+\dots)}_{m} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

PRO $x \in (-1,1)$

- a_i = POČET ROZKLADŮ ČÍSLA i NA m NEZÁPORNÝCH SČÍTANCŮ
  ↳ Z k-TÉ ZÁVORKY VYBÍRÁME ČLEN S EXPONENTEM ODPOVÍDAJÍCÍMU k-TÉMU SČÍTANCI V ROZKLADU i

(NAPŘÍKLAD: $m=3,\ i=5$ $\quad \overbrace{\times\times\times\times\times\times\times}^{m+i-1}$ $\quad$ o | o o o | o $\quad 5 = 1+3+1$)

$\Rightarrow a_i = \binom{m+i-1}{m-1}$

↳ MÁME $m+i-1$ OBJEKTŮ, $m-1$ Z NICH VYBEREME A PROHLÁSÍME ZA HRADLA |, ZBYLÝCH i OBJEKTŮ TVOŘÍ KULIČKY A POČET KULIČEK MEZI HRADLY URČUJE VELIKOST PŘÍSLUŠNÉHO SČÍTANCE V ROZKLADU

⊠

- PŘÍKLAD:
  - PRO $m=3$:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \dots + \binom{i+2}{2}x^i + \dots$$

APLIKACE – POČÍTÁNÍ BINÁRNÍCH ZAKOŘENĚNÝCH STROMŮ: (3)

– ZAKOŘENĚNÝ BINÁRNÍ STROM – BUĎ JE PRÁZDNÝ, NEBO OBSAHUJE SPECIÁLNÍ VRCHOL ZVANÝ KOŘEN A PÁR ZAKOŘENĚNÝCH BINÁRNÍCH STROMŮ, KTERÉ TVOŘÍ LEVÝ A PRAVÝ PODSTROM

– PŘÍKLADY:

$\emptyset$, •, ...

– b_n = POČET BINÁRNÍCH ZAKOŘENĚNÝCH STROMŮ NA $n \in \mathbb{N}_0$ VRCHOLECH

$\Rightarrow b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5, b_4 = 14, \dots$

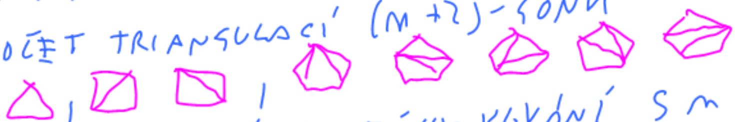
– NECHŤ $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ JE PŘÍSLUŠNÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

– **VĚTA 2**: PRO KAŽDÉ $n \in \mathbb{N}_0$ PLATÍ $b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{=C_n}$.

C_n = n-TÉ CATALANOVO ČÍSLO

– CATALANOVA ČÍSLA MAJÍ MNOHO INTERPRETACÍ, NAPŘÍKLAD:

C_n = POČET TRIANGULACÍ $(n+2)$-GONU

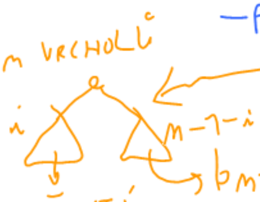


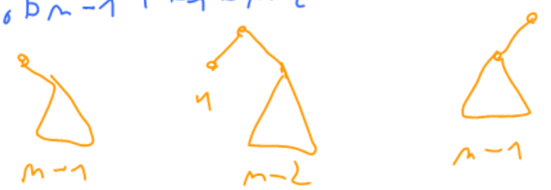
= POČET SPRÁVNÝCH UZÁVORKOVÁNÍ S n PÁRY ZÁVOREK

(), ()(), (()), ()()(), ()(()), (())(), (()()), ((())), ...

– DK VĚTY 2:

– PRO $\forall n \geq 1$ PLATÍ $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0$ (*)





– PODLE OPERACE NÁSOBENÍ VYTVOŘUJÍCÍCH FUNKCÍ JE PRAVÁ STRANA (*) ROVNA KOEFICIENTU U x^{n-1} V $b(x) \cdot b(x)$

– ZÁPIS TABULKOU:

KOEFICIENT U x^n V $b^2(x)$ JE $\sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}$ PODLE OPERACE NÁSOBENÍ

$b(x)$	$b_0 = 1$	$b_1 = 1$	$b_2 = 2$	...
$b(x) \cdot b(x)$	$\underbrace{b_0^2}_{= b_1}$	$\underbrace{b_0 b_1 + b_1 b_0}_{= b_2}$	$\underbrace{b_0 b_2 + b_1^2 + b_2 b_0}_{= b_3}$ PODLE (*)	...
POSUN DOPRAVA ← $x \cdot b(x) \cdot b(x)$	0	b_1	b_2	...
PŘIČTENÍ $b_0 = 1$ ← $1 + x \cdot b(x) \cdot b(x)$	$1 = b_0$	b_1	b_2	...

$\Rightarrow b(x) = 1 + x\cdot b(x)\cdot b(x)$

– ŘEŠÍME JAKO KVADRATICKOU ROVNICI S PROMĚNNOU $b(x)$ (A PARAMETREM x)

$$\Rightarrow b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

– SPRÁVNÁ VOLBA JE $\underline{\underline{b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}}$, PROTOŽE $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$, ALE $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = b_0 = 1 \neq \infty$

$\Rightarrow$ ZNÁME VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCI $b(x)$ A ZBÝVÁ URČIT KOEFICIENTY b_n

– PODLE ZOBECNĚNÉ BINOMICKÉ VĚTY (VĚTA 1) PLATÍ

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \binom{1/2}{k} \cdot x^k$$

– TEDY

$$b(x) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \binom{1/2}{k} \cdot x^k}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{-\frac{1}{2}\cdot(-4)^k \binom{1/2}{k}}^{=b_{k-1}} x^{k-1}$$

ČLEN SUMY PRO $k=0$ SE VYRUŠÍ S 1, VYDĚLÍME x

$$\Rightarrow b_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1} = \underbrace{-\frac{1}{2}(-4)^{n+1}}_{(n+2)\text{-KRÁT MÍNUS}} \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}}_{n\text{-KRÁT MÍNUS}} =$$

$$= (-1)^{n+2}\cdot 2^{2n+1}\cdot \underbrace{\frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{(2n-1)}{2}}{(n+1)!}}_{\text{V ČITATELI DĚLÍME ČÍSLEM } 2^{n+1}} =$$

MÍNUSY ZMIZÍ, PROTOŽE $(-1)^{2n+2} = 1$

$$= 2^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(n+1)!}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = 2^n\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n} = \underline{\underline{C_n}}$$

$\boxtimes$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

ROZKLADY ČÍSEL NA SČÍTANCE:

- VÍME:

$\forall m \in \mathbb{N}$ LZE ROZLOŽIT NA $k \in \mathbb{N}$ KLADNÝCH USPOŘÁDANÝCH SČÍTANCŮ $\binom{m-1}{k-1}$ ZPŮSOBY (UMÍSTÍME $k-1$ HRADEL NA $m-1$ POZIC)

- NAPŘÍKLAD PRO $m=4$ A $k=2$ MÁME $= 3+1 = 2+2 = 1+3$

$\circ\circ\circ|\circ \quad \circ\circ|\circ\circ \quad \circ|\circ\circ\circ$

$\Rightarrow$ POČET c_m USPOŘÁDANÝCH ROZKLADŮ NA m KLADNÉ SČÍTANCE JE ROVEN

$$c_m = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} = 2^{m-1}}_{\text{BINOMICKÁ VĚTA}} \Rightarrow c(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \frac{1-x}{1-2x}$$

ZÁKLADNÍ OPERACE

OPERACE DOSAZENÍ $2x$ DO $\frac{1}{1-x}$, POSUN VPRAVO A PŘIČTENÍ $c_0 = 1$

- JAK JE TO S NEUSPOŘÁDANÝMI ROZKLADY?

- p_m = POČET NEUSPOŘÁDANÝCH ROZKLADŮ m NA KLADNÉ SČÍTANCE
  - PŘÍKLADY:

$p_0 = 1$

$p_1 = 1 \qquad 1$

$p_2 = 2 \qquad 2 = 1+1$

$p_3 = 3 \qquad 3 = 2+1 = 1+1+1$

$p_4 = 5 \qquad 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$

$p_5 = 7 \qquad 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$

JE ZNÁM PŘESNÝ A VELMI KOMPLIKOVANÝ VZOREC (HARDY-RAMANUJAN-RADEMACHER)

- URČENÍ p_m JE MNOHEM TĚŽŠÍ PROBLÉM NEŽ URČENÍ c_m
- OBECNĚ - NENÍ ZNÁM „SNADNÝ" VZOREC PRO p_m
- PŘESTO ZNÁME VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCI $p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$
- $p(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)\cdots =$

ZÁPIS $m = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots$ ZACHYCUJE ČLEN $x^{k_i \cdot i}$ VYBRANÝ Z i-TÉ ZÁVORKY

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

$k_i \in \{0,1,2,\dots\}$ JE POČET VÝSKYTŮ ČÍSLA i V ROZKLADU ČÍSLA m

- ANALYTICKÝMI METODAMI PAK LZE ZJISTIT ASPOŇ ODHAD

$$p(m) \sim \frac{1}{4m\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2m}{3}}}$$