

Utvorňující funkce:

- početní technika využívající vhodných funkcí pro popis posloupností (1)

úloha:

Kolik způsobů lze vybrat 7 míček z 5 červených, 4 zelených a 3 žlutých míček?

- tedy chceme znát $a_7 = \left\{ (i, j, k) : i+j+k=7, \begin{matrix} i \in \{0, 1, \dots, 5\} \\ j \in \{0, 1, \dots, 4\} \\ k \in \{0, 1, \dots, 3\} \end{matrix} \right\}$

- $a_7 =$ koeficient u x^7 v $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+\dots+x^4)(1+x+\dots+x^3)$
↓
posloupnosti ↓
vhodná funkce

$\Rightarrow a_7 = 17$

- obecně pro množiny I_1, \dots, I_k a funkce $f_j(x) = \sum_{i \in I_j} x^i$ $j=1, \dots, k$, je koeficient u x^m v $f_1(x) \cdot \dots \cdot f_k(x)$ roven počtu řešení $i_1 + \dots + i_k = m$ kde $\forall i_j \in I_j$.

- koeficienty lze snadno spočítat počítačem
 - u každého i_j jak je to povoleno
 - kombinace i_1, \dots, i_k v obecnějším nastavení

Utvorňující funkce

posloupnosti $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \mathbb{R}$, je **numerická řada**

$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

příklady:

(i) $a_i = \begin{cases} 1 & 0 \leq i \leq m \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ (tedy $(a_i)_{i=0}^{\infty} = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$)
 $\Rightarrow a(x) = 1 + x + \dots + x^m = \sum_{i=0}^m x^i = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$ (koeficient příklad)
↓
součet geometrické řady

(ii) $a_i = 1$ pro $\forall i = 0, 1, \dots$ (tedy $(a_i)_{i=0}^{\infty} = (1, 1, \dots)$)
 $\Rightarrow a(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (rekurentní příklad)
↓
pro $x \in (-1, 1)$

(iii) $a_i = \binom{m}{i}$ pro $\forall i = 0, 1, \dots$ (tedy $(a_i)_{i=0}^{\infty} = (\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots)$)
 $\Rightarrow a(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \dots + \binom{m}{m}x^m = (1+x)^m$
↓
binomická věta

- z posloupnosti čísel umíme vytvořit funkci

$$(a_0, a_1, \dots) \rightarrow a(x)$$

- nerostoucí členy nás rychle, tué to i ubráníme

$$a(x) \rightarrow (a_0, a_1, \dots)$$

VĚTA 1:

pokud pro $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ $\exists K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall i: |a_i| \leq K^i$, pak pro všechna $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje absolutně a na libovolném ϵ okolí 0 určuje koeficienty a_i , protože $a_i = \frac{a^{(i)}(0)}{i!}$ = i-tá derivace $a(x)$ v $x=0$

- bez důkazu (potřeb spíše do analýzy)

- typicky: a_n = počet kombinatorických objektů „velikosti“ n

- tento objektů n odpovídá funkci $a(x)$
- chceme určit a_n (ideálně najít formuli)

kombinatorický objekt s metnými počtem a_n

METODA:

↓
vytvořící funkce $a(x)$

↓ OPERACE

rozklad $a(x)$ na vytvořící funkci se známými koeficienty

např. (i) , (ii) , (iii)

↓ OPERACE
určení a_n

OPERACE S VYTVOŽENÍMÍ FUNKCÍ:

MEJME $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$

OPERACE	POSLOUPNOST	VYTVOŽENÍ FUNKCE
SOUČET	$(a_i + b_i)_{i=0}^{\infty} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$	$(a+b)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i = a(x) + b(x)$
α -NÁSOBEK ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$(\alpha \cdot a_i)_{i=0}^{\infty} = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots)$	$(\alpha a)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i x^i = \alpha \cdot a(x)$
POSUN VPRAVO o m POZÍC	$(\underbrace{0, \dots, 0}_m, a_0, a_1, \dots)$	$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+m} = x^m \cdot a(x)$
POSUN VLEVO o m POZÍC	(a_m, a_{m+1}, \dots)	$\frac{1}{x^m} \left(a(x) - \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i}_{\text{ODEČTENÍ POČÁTEČNÍHO ČLEBU}} \right)$
DOSAZENÍ αX ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \alpha^3 a_3, \dots)$	$a(\alpha x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i x^i$
OBSAZENÍ X^m	$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, a_2, 0, \dots)$	$a(x^m) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i \cdot m}$
DERIVACE	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$	$a'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$
INTEGRÁL	$(0, a_0, \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{3} a_2, \dots)$	$\int_0^x a(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}$
SOUČIN	$(c_0, c_1, \dots)_1$ KDE $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$	$a(x) \cdot b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

Tzv. **KONVOLUCE**

Příklad 1A0:

Jaká je vyjádření funkce pro $(2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \dots)$? (4)

- součet: $(2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \dots) = (1, 2, 3, 4, \dots) + (1, -1, 1, -1, \dots)$ $\frac{1}{1-x}$

- derivace: $(1, 2, 3, 4, \dots)$ vznikne derivací vyjádření funkce $\frac{1}{1-x}$ pro $(1, 1, 1, \dots)$, tedy $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

- dosazení $-x$: $(1, -1, 1, -1, \dots)$ vznikne dosazením $-x$ do vyjádření funkce pro posloupnost $(1, 1, 1, \dots)$, tedy $\frac{1}{1+x}$

\Rightarrow hledaná funkce je $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}$

ŘEŠENÍ REKURENTNÍCH ROVNIC VYTVOŘENÍ FUNKCE:

- UKÁŽETE NA KONKRÉTNÍM PŘÍKLADĚ - FIBONACCIHO ČÍSLA $F_0 = 0, F_1 = 1$
- URČÍME F_n JAKO KOEFICIENTY FUNKCE $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i$ $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$
- PŮJDE $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$ PRO $\forall m \geq 0$

- VYNÁSOUBÍME ROVNICI x^m :

$$\rightarrow F_{m+2} \cdot x^m = F_{m+1} x^m + F_m \cdot x^m$$

- SČÍTAME PŘES $m \geq 0$:

$$\sum_{m \geq 0} F_{m+2} x^m = \sum_{m \geq 0} F_{m+1} x^m + \sum_{m \geq 0} F_m x^m$$

OPERACE POSUN VLEVO

$$\frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x)$$

- POUKĚ PŮJDE ČÍSLA PODMÍNEK $F_0 = 0, F_1 = 1$ URČÍME FUNKCI $F(x)$:

$$\frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x)}{x} + F(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x) \Rightarrow F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

- ZE ZNALOSTI FUNKCE $F(x)$ ZÁKLADNÍMI OPERACEMI URČÍME KOEFICIENTY F_m :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

- OPERACE S VYTVOŘENÍ FUNKCEI (α -NÁSOBEK, ODSOZŘENÍ αx , SOUČET)

$$\Rightarrow F_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m \right]$$

\Rightarrow PRŮVĚ \rightarrow SNE DOKÁŽELI TŽV. **BINETŮV VZOREC**

- UVĚDĚNÝ POSTUP PŮSOBE NA REKURENCE TYPH

$$a_{m+k} = \alpha_{k-1} a_{m+k-1} + \dots + \alpha_0 a_m, \text{ KUDĚ } k \in \mathbb{N} \text{ A } \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{R} \text{ (či } \mathbb{C})$$

(U FIBONACCIHO POSLOUPNOSTI MÁME $k=2, \alpha_0=1, \alpha_1=1$)

- TĚDY PRO **HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ REKURENCE k -TĚHO STUPNĚ S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY**