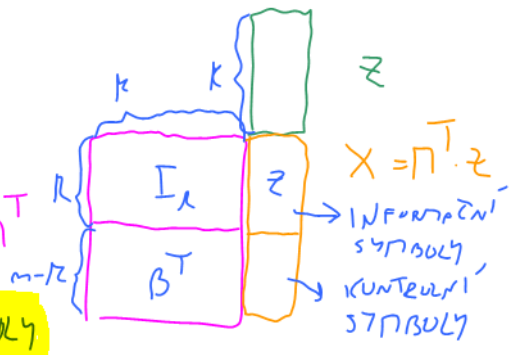
SAMOOPRAVNÉ KÓDY - LINEÁRNÍ KÓDY

- PŘIPOMENUTÍ Z MINULA:
  - LINEÁRNÍ KÓD JE PODPROSTOR VEKTOROVÉHO PROSTORU $\mathbb{K}^n$ KDE $\mathbb{K}$ JE KONEČNÉ TĚLESO (A ZÁROVEŇ $\mathbb{K}$ BUDEŽ NĚJAKÉ Σ)
    - S PARAMETRY n, k, d, q SE ZNAČÍ $[n, k, d]_q$
    - VÍME, ŽE KAŽDÉ KONEČNÉ TĚLESO $\mathbb{K}$ OBSAHUJE SAMOZŘEJMĚ TĚLESO $\mathbb{F}_q$
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : d(x,y) = d(x+z, y+z) = d(x-y, 0)$
  - $\Rightarrow$ MINIMÁLNÍ VZDÁLENOST d SE ROVNÁ $\min\{d(x-y,0) = \min\{d(x,0)\}$
    $x, y \in C$, $x \neq y$; $x \in C$, $x \neq 0$
    - $\Rightarrow$ KE ZJIŠTĚNÍ d NENÍ TŘEBA SPOČÍTAT VŠECHNY VZDÁLENOSTI, STAČÍ POČÍTAT NENULOVÉ SLOŽKY KÓDOVÝCH SLOV
- VÝHODA LINEÁRNÍCH KÓDŮ - ÚSPORNÝ POPIS - NAMÍSTO VŠECH q^k PRVKŮ KÓDU STAČÍ UVÉST k PRVKŮ NĚJAKÉ JEHO BÁZE
  - GENERUJÍCÍ MATICE KÓDU C = MATICE $\Pi \in \Sigma^{k \times n}$ JEJÍŽ ŘÁDKY TVOŘÍ BÁZI KÓDU C
- V PROSTORU $\mathbb{F}_q^n$ DEFINUJEME SKALÁRNÍ SOUČIN $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ PRO $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}_q^n$
  - NENÍ SKALÁRNÍ SOUČINEM PODLE KLASICKÉ DEFINICE, PROTOŽE NEPLATÍ $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (NAPŘÍKLAD PRO $x = (1,1,0,0)$ NAD $\mathbb{F}_2$)
- DUÁLNÍM KÓDEM K LINEÁRNÍMU KÓDU C JE JEHO ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK
  $C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^n : \langle x, y \rangle = 0$ PRO KAŽDÉ $y \in C\}$
  - Z PODOBNY NAŠEHO SKALÁRNÍHO SOUČINU NEMUSÍ BÝT $C \cap C^\perp = \{0\}$
  - PLATÍ $\dim(C^\perp) + \dim(C) = n$ A $(C^\perp)^\perp = C$
  - GENERUJÍCÍ MATICE $\Pi^\perp$ KÓDU $C^\perp$ SE NAZÝVÁ KONTROLNÍ MATICÍ
    - ŘÁDKY KONTROLNÍ MATICE URČUJÍ LINEÁRNÍ ROVNICE, KTERÉ MUSÍ KAŽDÉ SLOVO Z C SPLŇOVAT (A NALOPAK KAŽDÝ VEKTOR Z $\mathbb{F}_q^n$, KTERÝ TE SPLŇUJE JE KÓDOVÝM SLOVEM V C
    - NEBOLI $C = \{x \in \mathbb{F}_q^n : \Pi^\perp \cdot x = 0\}$

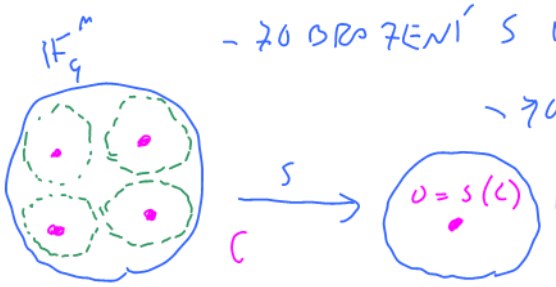
- MĚJME LINEÁRNÍ KÓD C S PARAMETRY $[m, k, d]_q$

- KÓDOVÁNÍ LINEÁRNÍMI KÓDY:
  - ZE VSTUPNÍHO SLOVA $z \in \mathbb{F}_q^k$ CHCEME VYTVOŘIT KÓDOVÉ SLOVO $x \in C \subseteq \mathbb{F}_q^m$
  - NECHŤ $\Pi \in \mathbb{F}_q^{k \times m}$ JE GENERUJÍCÍ MATICE KÓDU C
  - PRO KAŽDÝ LINEÁRNÍ KÓD EXISTUJE EKVIVALENTNÍ KÓD JEHOŽ GENERUJÍCÍ MATICE MÁ TVAR $\left[\begin{array}{c|c} I_k & B \end{array}\right]_k$ (TZV. STANDARDNÍ FORMA)
    - STAČÍ GENERUJÍCÍ MATICI UPRAVIT GAUSSOVOU ELIMINAČNÍ METODOU A PŘÍPADNĚ PERMUTOVAT SLOUPCE
  - $\Rightarrow$ BÚNO MATICE Π JE VE STANDARDNÍ FORMĚ
  - JAKO KÓDOVÉ SLOVO ZVOLÍME $x = \Pi^T \cdot z \in C$
    - $\Rightarrow x$ MÁ NA PRVNÍCH k SOUŘADNICÍCH SLOVO z (TZV. INFORMAČNÍ SYMBOLY) A NA ZBYLÝCH $m-k$ SOUŘADNICÍCH OBSAHUJE TZV. KONTROLNÍ SYMBOLY



- DEKÓDOVÁNÍ LINEÁRNÍMI KÓDY:
  - U LINEÁRNÍCH KÓDŮ EXISTUJE METODA, JAK EFEKTIVNĚJI DEKÓDOVAT
  - TUTO METODU SI NYNÍ POPÍŠEME
  - PO ODESLÁNÍ $x \in C$ BYLO PŘIJATO $y \in \mathbb{F}_q^m$
  - PŘÍJEMCE ZNÁ POUZE y A CHCE NAJÍT KÓDOVÉ SLOVO, KTERÉ JE NEJBLÍŽ
  - NECHŤ $\Pi^\perp$ JE KONTROLNÍ MATICE KÓDU C
    - JE-LI GENERUJÍCÍ MATICÍ KÓDU C MATICE $\Pi = \left[\begin{array}{c|c} I_k & B \end{array}\right]_k$, PAK $\Pi^\perp = \left[\begin{array}{c|c} -B^T & I_{m-k} \end{array}\right]_{m-k}$, PROTOŽE PAK $\Pi^\perp \cdot \Pi^T = -B \cdot I_k + I_{m-k} B^T = 0$
  - JAKO SYNDROM SLOVA $y \in \mathbb{F}_q^m$ NAZVEME SOUČIN $\Pi^\perp \cdot y$
  - PROTOŽE $C = \{x \in \mathbb{F}_q^m : \Pi^\perp x = 0\}$, TAK JSME URČENÉ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $s : \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q^{m-k}$ SPLŇUJÍCÍ $C = \ker(s)$
    - JÁDRU ZOBRAZENÍ s
  - ZOBRAZENÍ s NAZVEME SYNDROM
  - ZOBRAZENÍ s JE NA, PROTOŽE PLATÍ:

$$\underbrace{\dim(\ker(s))}_{=\dim(C)=k} + \dim(\underbrace{\mathrm{Im}(s)}_{\text{OBRAZ } s}) = \underbrace{\dim(\mathbb{F}_q^m)}_{=m}$$



- **LEMMA 1:**
  ZOBRAZENÍ s JE PROSTÉ NA $B(0,t)$, KDE $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$

- **DK:**
  - MĚJME $y, y' \in B(0,t)$, $y \neq y'$
  - POTOM $d(y,y') \leq d(0,y) + d(0,y') \leq 2t$
    (HAMMINGOVA VZDÁLENOST; Δ-NEROVNOST; $y, y' \in B(0,t)$)
  - s JE LINEÁRNÍ
  - SPOREM - NECHŤ $s(y) = s(y')$, POTOM $0 = s(y) - s(y') = s(y - y')$
  - $C = \ker(s) \Rightarrow y - y' \in C$
  - MĚJME PRO KAŽDÉ $x \in C \setminus \{0\}$ PLATÍ $d(x,0) \geq d \geq 2t+1$ A $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$
    (d - MIN. VZDÁLENOST)
    $d(0, y-y') = d(y,y') \leq 2t$
    $\Rightarrow y - y' = 0$ A TEDY $y = y' \Rightarrow$ SPOR ⊠

- POUŽIJE **LEMMA 1** TEDY K $s|_{B(0,t)}$ EXISTUJE INVERZNÍ ZOBRAZENÍ
  (s OMEZENÉ NA $B(0,t)$)

$s^{-1}: s(B(0,t)) \longrightarrow B(0,t)$

- s^{-1} NENÍ LINEÁRNÍ, ALE LZE POPSAT TABULKOU S q^{n-k} PRVKY Z $B(0,t)$
- V TÉTO TABULCE JE PRO KAŽDÝ SYNDROM SLOVA ULOŽENO NĚJAKÉ SLOVO S MINIMÁLNÍ VAHOU A S DANÝM SYNDROMEM

- NYNÍ VÍME, ŽE PLATÍ:
  1) PRO $y \in B(x,t)$ MÁME $s(y - x) = s(y) - s(x) = s(y)$
     (s JE LINEÁRNÍ; $s(x) = 0$, PROTOŽE $x \in C = \ker(s)$)
     - NEBOLI y A VZNIKLÁ CHYBA $y - x$ MAJÍ STEJNÝ SYNDROM
  2) PRO $y \in B(x,t)$ MÁME $y - x \in B(0,t)$ A TEDY $y - x = s^{-1}(s(y - x))$
     ($s^{-1} \circ s$ JE IDENTITOU NA $B(0,t)$)
  3) $x = y - (y - x) \overset{2)}{=} y - s^{-1}(s(y - x)) \overset{1)}{=} \underline{y - s^{-1}(s(y))}$
     - NEZÁVISÍ NA x
     - PRO DANÉ y POUZÍT SYNDROMU $s(y)$ URČÍME KÓDOVÉ SLOVO x, ZE KTERÉHO VZNIKLO, NASTALO-LI $\leq t$ CHYB

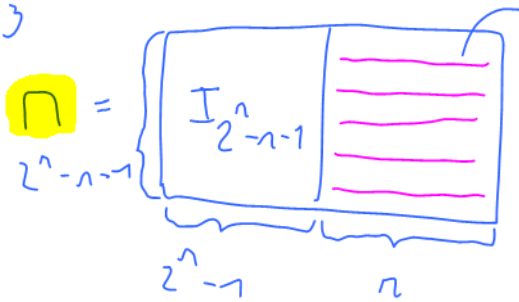
- **JAK TEDY DEKÓDOVAT:**
  - PRO PŘIJATÉ SLOVO $y \in \mathbb{F}_q^n$ SPOČÍTAT $x = y - s^{-1}(\pi^{\perp} y)$, KDE $\pi^{\perp}$ JE KONTROLNÍ MATICE A ZOBRAZENÍ s^{-1} MÁME PŘIPRAVENÉ JAKO TABULKU
  - NASTALO-LI $\leq t$ CHYB, JE x KÓDOVÉ SLOVO, ZE KTERÉHO y VZNIKLO

- **TVRZENÍ 1:**

  VZDÁLENOST d KÓDU C = MINIMÁLNÍ POČET LINEÁRNĚ ZÁVISLÝCH SLOUPCŮ KONTROLNÍ MATICE H^T

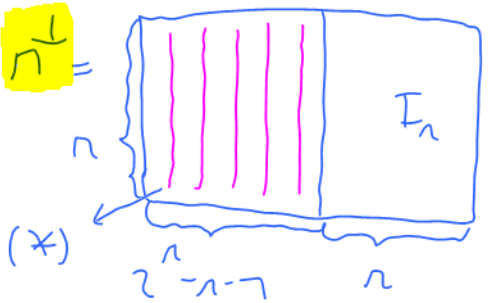
- **DK:**
  - VÍME, ŽE d = MINIMÁLNÍ POČET NENULOVÝCH SYMBOLŮ V NENULOVÉM SLOVĚ x Z C
  - $x \in C \Leftrightarrow H^T x = 0$ A TEDY SLOUPCE H^T VYBRANÉ NENULOVÝMI SOUŘADNICEMI x JSOU LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ ⊠

- **HAMMINGOVY KÓDY:**
  - PŘÍKLADY LINEÁRNÍCH KÓDŮ, KTERÉ JSOU DOKONCE PERFEKTNÍ
  - JEJICH NEVÝHODOU JE, ŽE NEDOKÁŽÍ OPRAVIT PŘÍLIŠ MNOHO CHYB
  - NAD TĚLESEM $\mathbb{F}_2$ (TEDY $q=2$)
  - PĚTNÉ PARAMETR $n \geq 3$
  - GENERUJÍCÍ MATICE G =



VŠECHNY NENULOVÉ VEKTORY Z $\mathbb{F}_2^n$ RŮZNÉ OD VEKTORŮ KANONICKÉ BÁZE (*)

⇒ KONTROLNÍ MATICÍ H^T =



- SLOUPCE = NENULOVÉ VEKTORY Z $\mathbb{F}_2^n$
- DVA VEKTORY Z $\mathbb{F}_2^n \setminus \{0\}$ JSOU LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ ⇔ JSOU TOTOŽNÉ ⇒
  ⇒ MINIMÁLNÍ POČET LINEÁRNĚ ZÁVISLÝCH SLOUPCŮ V H^T JE 3 A PODLE **TVRZENÍ 1** JE VZDÁLENOST KÓDU 3 (PRO $n \geq 3$)

⇒ TEDY SE O KÓD S PARAMETRY $[2^n-1, 2^n-n-1, 3]_2$

3 OPRAVÍ SE 1 CHYBU

- **PŘÍKLAD:**
  - PRO $n=3$ DOSTÁVÁME KÓD S PARAMETRY $[7,4,3]_2$
  - JEDNÁ SE O KÓD SESTAVENÝ Z FANOVY ROVINY PŘIDÁNÍM PUNKTU A DOPLŇKŮ

- HAMMINGOVY KÓDY JSOU PERFEKTNÍ:

- STAČÍ UKÁZAT, ŽE HAMMINGŮV ODHAD $|C| \leq \frac{q^n}{V(t)}$ JE TĚSNÝ
- $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor = 1$
- $V(t) = V(1) = \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i = 1 + (2^n - 1) = \underline{\underline{2^n}}$
- $\frac{q^n}{V(1)} = \frac{2^{2^n-1}}{2^n} = \underline{\underline{2^{2^n-n-1}}}$
- $|C| = 2^k = \underline{\underline{2^{2^n-n-1}}} \Rightarrow$ HAMMINGŮV ODHAD JE SKUTEČNĚ PRO HAMMINGOVY KÓDY TĚSNÝ

k = VOLBA PRVKŮ BÁZE

- DÁ SE I LÉPE REPREZENTOVAT FUNKCE s^{-1}:

- TABULKA REPREZENTUJÍCÍ s^{-1} MÁ POUZE $2^{n-k} = 2^{2^n-1-(2^n-n-1)} = 2^n = n+1$ PRVKŮ
- VE SKUTEČNOSTI TABULKU VŮBEC NEPOTŘEBUJEME
- ZPŘEHODÍME-LI SLOUPCE ρ ŘÁDKY $\Pi^\perp$ PAK, ABY i-TÝ SLOUPEC BYL BINÁRNÍM ZÁPISEM ČÍSLA i, PAK $s(y)$ UKÁŽE POZICI, NA NÍŽ NASTALA CHYBA

$$\Pi^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

BINÁRNĚ 1 2 3 4 ...

- PROTOŽE $d=3$, PAK STAČÍ UVAŽOVAT JEN ≤ 1 CHYBU
- PRO $y = x = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ JE $s(y-x)$ i-TÝ SLOUPEC $\Pi^\perp$ = BINÁRNÍ ZÁPIS i
- NASTALA-LI ≤ 1 CHYBA, PAK VÍME, ŽE PŘIJATÉ SLOVO y A CHYBA $y-x$ MAJÍ STEJNÝ SYNDROM

$\Rightarrow$ LZE DEKÓDOVAT NÁSLEDOVNĚ:

- JE-LI $s(y) = 0$, PAK $x = y$
- JINAK JE $s(y)$ BINÁRNÍM ZÁPISEM ČÍSLA i A PAK x = SLOVO VZNIKLÉ Z y VYNĚNOU BITU, KTERÝ JE V y NA POZICI i