ÚVOD DO RAMSEYOVY TEORIE:

- Z minula známe Ramseyovu větu pro grafy a dvě barvy
  ↓ barevné dvojice vrcholů
- Nyní ji rozšíříme na více barev a také na barevné p-tice vrcholů
- Pro čísla p, n, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ definujme **Ramseyovo číslo**
  - p … velikost barvených množin
  - n … počet barev
  - $m_1, \dots, m_n$ … velikosti 1-barevných podstruktur, které chceme najít

$R_p(m_1, \dots, m_n)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každou množinu X s $|X| \geq N$ a každé n-obarvení množiny $\binom{X}{p}$ existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ a $Y \subseteq X$ takové, že $|Y_i| = m_i$ a všechny p-tice z $\binom{Y}{p}$ mají i-tou barvu

- **Věta 5** (**Ramseyova věta pro p-tice**, 1930): Pro každé $p, n, m_1, \dots, m_n$ je $R_p(m_1, \dots, m_n)$ konečné.

Dk:
- Zobecníme myšlenku důkazu Ramseyovy věty pro grafy a 2 barvy
- Mějme X, $|X| \geq N$ pro velké N a n-obarvení χ množiny $\binom{X}{p}$
- Použijeme indukci podle p a $m_1 + \dots + m_n$
  - určíme později
- Začátek indukce:
  - pro $p = 1$ se jedná o Dirichletův princip (Věta 2)
  - pokud je některé $m_i = 1$, pak $R_p(m_1, \dots, m_n) = 1$ (stačí jeden vrchol)
- Indukční krok:
  - nechť jsou $p \geq 2$ a $m_1, \dots, m_n \geq 2$
  - předpokládejme, že věta platí pro $p-1$ a každé $m_1, \dots, m_n$ a pro p a každé $m'_1, \dots, m'_n$, kde $m'_1 + \dots + m'_n < m_1 + \dots + m_n$
  - zvolme $v \in X$ a obarvěme každé $P \in \binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$ barvou $\chi(P \cup \{v\})$, definujme $m_i = R_p(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n)$
  - je-li $N \geq 1 + R_{p-1}(m_1, \dots, m_n)$, pak z IP pro $p-1, m_1, \dots, m_n$ aplikovaného na $\binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$ máme $j \in \{1, \dots, n\}$ a $X' \subseteq X \setminus \{v\}$ takové, že $|X'| = m_j$ a všechny p-tice $P \cup \{v\}$ s $P \in \binom{X'}{p-1}$ mají j-tou barvu v χ

- uvažme $\binom{X'}{p}$, které je obarvené n-obarvením χ
- z volby m_j máme podle **IP** pro $p, m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n$
  $i \in \{1, \dots, n\}$ a $Y \subseteq X'$ takové, že všechny p-tice v $\binom{Y}{p}$ mají i-tou barvu a $|Y| = m_i$, pokud $i \neq j$, a $|Y| = m_i - 1$, pokud $i = j$
  ↳ pak jsme hotovi
- pokud $i = j$, pak množina $Y \cup \{v\}$ má všechny p-tice i-té barvy a $|Y \cup \{v\}| = m_i$
  ↳ opět jsme hotovi

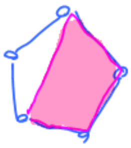
$\boxtimes$

- stačí tedy zvolit $N \geq 1 + R_{p-1}(m_1, \dots, m_n)$

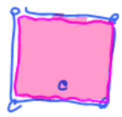
- **Aplikace – Erdős–Szekeresova věta:**
  - jedna z prvních aplikací Ramseyovy věty
  - **P** = konečná množina bodů v rovině $\mathbb{R}^2$
    - P je v **obecné poloze**, pokud neobsahuje 3 body na přímce
    - P je v **konvexní poloze**, pokud tvoří množinu vrcholů konvexního mnohoúhelníku

- **Lemma 1**: Každá množina 5 bodů v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje 4 body v konvexní poloze

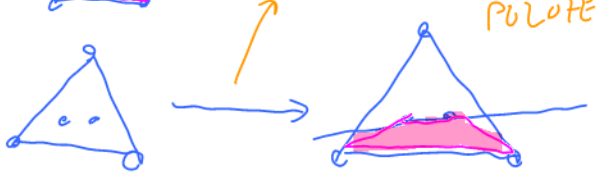
- Dk: – 3 (kombinatoricky odlišné) případy:
  - **a)** 5 bodů na hranici:



  - **b)** 4 body na hranici:



  - **c)** 3 body na hranici:



přímka skrz dva body uvnitř má 2 body z hranice na téže straně a tyto body spolu s oběma vnitřními jsou v konvexní poloze

$\boxtimes$

– **VĚTA 6** (**ERDŐSOVA-SZEKERESOVA VĚTA**, 1935):

PRO KAŽDÉ $k \in \mathbb{N}$ EXISTUJE NEJMENŠÍ $ES(k) \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE KAŽDÁ KONEČNÁ MNOŽINA $\geq ES(k)$ BODŮ V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE OBSAHUJE k BODŮ V KONVEXNÍ POLOZE.

$|P| \geq ES(6)$

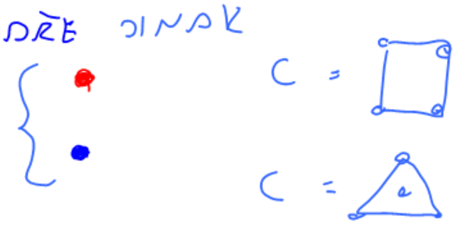
– DK:

– UKÁŽEME, ŽE $ES(k) \leq R_4(k,5)$

– MĚJME KONEČNOU MNOŽINU BODŮ P V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE S $|P| \geq R_4(k,5)$

– OBARVÍME KAŽDOU ČTVEŘICI C BODŮ Z P ČERVENĚ, JE-LI V OBECNÉ POLOZE A MODŘE JINAK

– TEDY $\chi(C) =$



– **VĚTA 4** $\Rightarrow \exists$ **a)** BUĎ $Q \subseteq P$ S $|Q| = k$ A SE VŠEMI ČTVEŘICEMI ČERVENÝMI V χ

b) NEBO PĚTICE BODŮ SE VŠEMI ČTVEŘICEMI MODRÝMI V χ

– b) NENASTANE PODLE **LEMMA 1**, V PŘÍPADĚ a) JE Q V KONVEXNÍ POLOZE A JSME HOTOVI ☒

– TAKÉ SE UKÁZALO $ES(k) \leq R_3(k,k)$, DÁ SE RELATIVNĚ SNADNO UKÁZAT

$ES(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1$

– **ERDŐSOVA-SZEKERESOVA DOMNĚNKA** (1935, 500\$):

$\forall k \geq 2: ES(k) = 2^{k-2} + 1$

– PLATÍ PRO $k \leq 6$, NEJLEPŠÍ ZNÁMÝ ODHAD: $ES(k) \leq 2^{k + o(k)}$ (SUK, 2016)

– ZNÁMO: $ES(k) \geq 2^{k-2} + 1$ PRO KAŽDÉ $k \geq 2$

- RAMSEYOVA VĚTA PRO NEKONEČNOU VERZI

- **VĚTA 7 (NEKONEČNÁ VERZE RAMSEYOVY VĚTY):**
  PRO KAŽDÉ $p, n \in \mathbb{N}$ A PRO KAŽDÉ n-OBARVENÍ MNOŽINY $\binom{\mathbb{N}}{p}$ EXISTUJE NEKONEČNÁ $A \subseteq \mathbb{N}$ TAKOVÁ, ŽE VŠECHNY JEJÍ p-TICE MAJÍ V DANÉM n-OBARVENÍ STEJNOU BARVU.

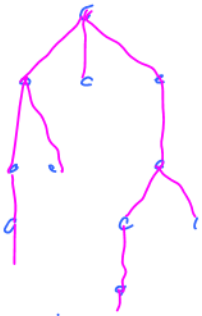
- DK:
  - POSTUPUJEME INDUKCÍ PODLE p
  - ZAČÁTEK INDUKCE:
    - PRO $p=1$ JE TVRZENÍ TRIVIÁLNÍ
  - INDUKČNÍ KROK:
    - MĚJME n-OBARVENÍ $\chi: \binom{\mathbb{N}}{p} \to \{1, \dots, n\}$ (BÚNO TOTO JSOU NAŠE BARVY)
    - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE VĚTA PLATÍ PRO $p-1$
    - SESTROJÍME POSLOUPNOST $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{N}$ NEKONEČNÝCH MNOŽIN
    - POLOŽME $A_1 = \mathbb{N}$ A PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE MÁME $A_1, \dots, A_i$, $i \geq 1$
    - ZVOLME NEJMENŠÍ PRVEK v_i Z A_i
    - ZVOLME n-OBARVENÍ χ_i, KTERÉ KAŽDÉ $(p-1)$-TICI $Q \in \binom{A_i \setminus \{v_i\}}{p-1}$ PŘIŘADÍ BARVU $\chi_i(Q) = \chi(Q \cup \{v_i\})$
    - POTOM Z IP PRO $p-1$ NA $A_i \setminus \{v_i\}$ EXISTUJE $A_{i+1} \subseteq A_i \setminus \{v_i\}$ TAKOVÉ, ŽE VŠECHNY $(p-1)$-TICE Z $\binom{A_{i+1}}{p-1}$ MAJÍ V χ_i STEJNOU BARVU $b_i \in \{1, \dots, n\}$ A A_{i+1} JE NEKONEČNÁ
    - POTÉ MÁME POSLOUPNOST $v_1, v_2, \dots$ TAKOVOU, ŽE KAŽDÁ p-TICE $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$ S $v_{i_1} < \dots < v_{i_p}$ MÁ V χ BARVU b_{i_1} (TEDY BARVA ZÁVISÍ JEN NA NEJMENŠÍM PRVKU)
    - BUĎ $b \in \{b_1, b_2, \dots\}$ BARVA, KTERÁ SE VYSKYTNE NEKONEČNĚKRÁT A ZVOLME $A = \{v_i : b = b_i\}$
    - POTOM KAŽDÁ p-TICE Z $\binom{A}{p}$ MÁ V χ BARVU b ☒

– NEKONEČNÁ VERZE RAMSEYOVY VĚTY IMPLIKUJE KONEČNOU

– DÁ SE UKÁZAT SPOREM, MY SI JI DOKÁŽEME POMOCÍ NÁSLEDUJÍCÍHO VÝSLEDKU

– PRO JEDNODUCHOST JE OMEZÍME NA PŘÍPAD $m_1 = \dots = m_r = m$

– LEMMA Z (KŐNIGOVO LEMMA): V KAŽDÉM ZAKOŘENĚNÉM STROMĚ, KTERÝ MÁ NEKONEČNĚ MNOHO VRCHOLŮ ALE JEN KONEČNÉ STUPNĚ EXISTUJE NEKONEČNÁ CESTA ZAČÍNAJÍCÍ V KOŘENI



– BEZ DŮKAZU (CVIČENÍ)

– SPOREM – NECHŤ PRO KAŽDÉ $N \in \mathbb{N}$ $\exists$ r-OBARVENÍ $\chi_N : \binom{\{1,\dots,N\}}{r} \to \{1,\dots,n\}$ TAKOVÉ, ŽE ŽÁDNÁ MNOŽINA $A \in \binom{\{1,\dots,N\}}{m}$ NENÍ 1-BAREVNÉ $\binom{A}{r}$ V χ_N

– ZKONSTRUUJEME STROM T, KDE N-TÁ ÚROVEŇ JE TVOŘENA OBARVENÍMI χ_N A KDE KOŘEN V NULTÉ ÚROVNI ODPOVÍDÁ $\emptyset$

– χ_{N+1} JE SYNEM χ_N, POKUD ROZŠIŘUJE χ_N

– TEDY $\chi_{N+1} \restriction \binom{\{1,\dots,N\}}{r} = \chi_N$

$\Rightarrow$ STROM T MÁ KONEČNÉ STUPNĚ

– VĚTA 8 $\Rightarrow$ $\exists$ NEKONEČNÁ VĚTEV V T $\Rightarrow$ r-OBARVENÍ $\chi : \binom{\mathbb{N}}{r} \to \{1,\dots,n\}$ BEZ NEKONEČNÉ $A \subseteq \mathbb{N}$ S JEDNOBAREVNOU $\binom{A}{r}$ $\Rightarrow$ SPOR S VĚTOU 7

$\boxtimes$