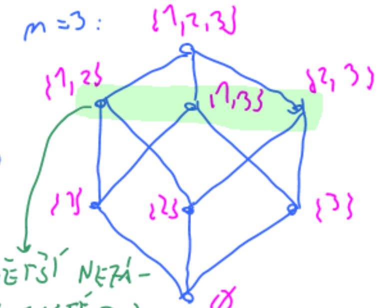
POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY (SPERNEROVA VĚTA):

①

- UKÁŽEME SI JEŠTĚ JEDNU APLIKACI POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY
- SYSTÉM $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,n\}}$ PODMNOŽIN n-PRVKOVÉ MNOŽINY $\{1,\dots,n\}$ JE **NEZÁVISLÝ**, POKUD PLATÍ: $\forall A, B \in \mathcal{M},\ A \neq B : A \not\subseteq B \ \&\ B \not\subseteq A$

- **VĚTA 1 (SPERNEROVA VĚTA)**: KAŽDÝ NEZÁVISLÝ SYSTÉM V $2^{\{1,\dots,n\}}$ OBSAHUJE $\leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ MNOŽIN A TENTO ODHAD JE TĚSNÝ.
  - EKVIVALENTNĚ: NEJDELŠÍ ANTIŘETĚZEC V POSETU $(2^{\{1,\dots,n\}}, \subseteq)$ MÁ PRÁVĚ $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ PRVKŮ



NEJVĚTŠÍ NEZÁVISLÝ SYSTÉM V $2^{\{1,2,3\}}$ MÁ VELIKOST $\binom{3}{\lceil \frac{3}{2} \rceil} = 3$

- DK:
  - 1) EXISTUJE NEZÁVISLÝ SYSTÉM $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,n\}}$ VELIKOSTI $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
    - STAČÍ VZÍT $\mathcal{M} = \{A \subseteq \{1,\dots,n\} : |A| = \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$
    - POTOM $\mathcal{M}$ JE JISTĚ NEZÁVISLÝ
  - 2) UKÁŽEME, ŽE KAŽDÝ NEZÁVISLÝ SYSTÉM $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,n\}}$ SPLŇUJE $|\mathcal{M}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
    - DVĚMA ZPŮSOBY SPOČÍTÁME POČET $Z = |\{(M, \check{R}) : M \in \mathcal{M},\ \check{R} =$ MAXIMÁLNÍ (CO DO VELIKOSTI) ŘETĚZEC OBSAHUJÍCÍ $M\}|$
    - **MAXIMÁLNÍ ŘETĚZEC** $\check{R}$ VYPADÁ NÁSLEDOVNĚ:

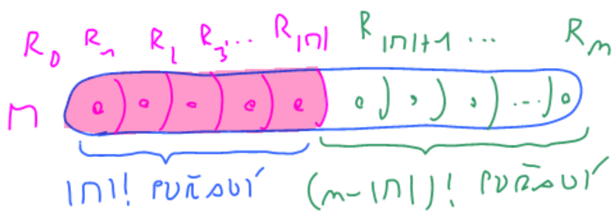
$$\check{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_n\}, \text{ KDE: } \emptyset = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_n = \{1,\dots,n\},\ |R_{i+1} \setminus R_i| = 1$$

- **1. ZPŮSOB** ODHADNUTÍ Z:
  - KAŽDÝ MAX. ŘETĚZEC OBSAHUJE ≤ 1 MNOŽINU Z $\mathcal{M}$, PROTOŽE $\mathcal{M}$ JE NEZÁVISLÝ → $|\check{R} \cap \mathcal{M}| \leq 1$ PRO KAŽDÝ MAX. ŘETĚZEC $\check{R}$

$$\Rightarrow Z \leq n! \cdot 1 = n!$$

POČET MAXIMÁLNÍCH ŘETĚZCŮ JE $n!$, PROTOŽE STAČÍ VYBRAT POŘADÍ PRVKŮ Z $\{1,\dots,n\}$, VE KTERÉM ROZŠIŘUJEME MNOŽINY $R_0, R_1, \dots, R_n$

- **2. ZPŮSOB** ODHADNUTÍ Z:
  - KAŽDOU MNOŽINU $M \in \mathcal{M}$ LZE DOPLNIT $|M|!\,(n-|M|)!$ ZPŮSOBY NA MAX. ŘETĚZEC $\check{R} = \{R_0, \dots, R_n\} \ni M$



$$\Rightarrow Z = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M|!\,(n-|M|)!$$

2

- DOHROMADY:

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} |n|!\,(m-|n|)! = Z \leq m!$$

$$\Rightarrow 1 \geq \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{|n|!\,(m-|n|)!}{m!} = \sum_{n \in \mathcal{M}} \binom{m}{|n|}^{-1} \geq \sum_{n \in \mathcal{M}} \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{-1} = \frac{|\mathcal{M}|}{\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}}$$

$\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ JE NEJVĚTŠÍ BINOMICKÝ KOEFICIENT Z $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{m}$, VÍME Z 1. PŘEDNÁŠKY

$$\Rightarrow \underline{\underline{|\mathcal{M}| \leq \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}}}$$

$\boxtimes$

- POZNÁMKA:

PODLE VĚTY O DLOUHÉM A ŠIROKÉM MÁME DOLNÍ ODHAD $\geq \dfrac{|2^{\{1,\dots,m\}}|}{\omega(2^{\{1,\dots,m\}}, \subseteq)} =$

ω … VELIKOST MAXIMÁLNÍHO ŘETĚZCE V $(2^{\{1,\dots,m\}}, \subseteq)$

$$= \frac{2^m}{m+1} \ll \frac{2^m}{\Theta(\sqrt{m})} = \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$$

PODLE ODHADŮ Z 1. PŘEDNÁŠKY

RAMSEYOVA TEORIE: (3)

– „KAŽDÝ VELKÝ SYSTÉM OBSAHUJE HOMOGENNÍ PODSYSTÉM" DANÉ VELIKOSTI

– OBARVENÍ MNOŽINY X n BARVAMI (ZKRÁCENĚ n-OBARVENÍ) JE LIBOVOLNÉ ZOBRAZENÍ PŘIŘAZUJÍCÍ KAŽDÉMU PRVKU Z X JEDNU Z n BAREV

– NÁSLEDUJÍCÍ VĚTA JE NEJZÁKLADNĚJŠÍM VÝSLEDKEM TOHOTO TYPU

– VĚTA 2 (DIRICHLETŮV PRINCIP): → V ANGLIČTINĚ „PIGEONHOLE PRINCIPLE"

$\forall n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$: OBARVÍME-LI PRVKY MNOŽINY X n BARVAMI, PAK, JE-LI

$$|X| \geq D(m_1, \dots, m_n; n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1),$$

X OBSAHUJE m_i PRVKŮ i-TÉ BARVY.

– DŮKAZ JE TRIVIÁLNÍ

– $D(m_1, \dots, m_n; n)$ JE NEJMENŠÍ VELIKOST MNOŽINY X, PRO KTEROU DIRICHLETŮV PRINCIP PLATÍ:

$\Rightarrow \nexists\, m_i$ PRVKŮ Z X i-TÉ BARVY

– CO KDYŽ OBARVUJEME DVOJICE PRVKŮ Z X?

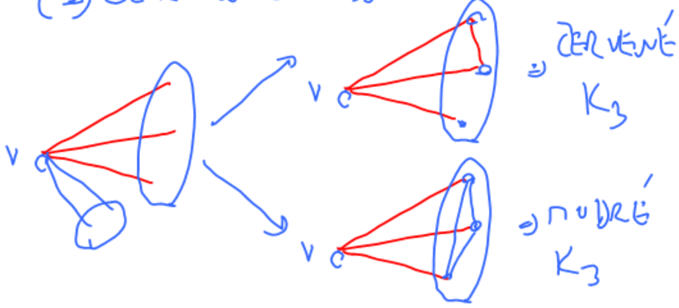
– PŘÍKLAD:

– NA KAŽDÉ PÁRTY ≥ 6 LIDÍ EXISTUJÍ 3, CO SE NAVZÁJEM ZNAJÍ, NEBO 3, CO SE NAVZÁJEM NEZNAJÍ (NEBOLI V KAŽDÉM 2-OBARVENÍ $E(K_m)$, $m \geq 6$, EXISTUJE TROJÚHELNÍK S HRANAMI TÉŽE BARVY)

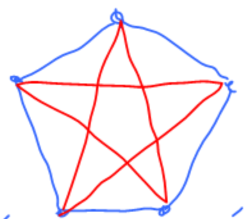
– MĚJME 2-OBARVENÍ $E(K_m)$ ČERVENOU A MODROU BARVOU

– VRCHOL $v \in V(K_m)$ MÁ $m-1$ SOUSEDŮ, Z NICHŽ, PODLE VĚTY 2, ASPOŇ $\left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil \geq 3$ JE SPOJENO S v ČERVENOU HRANOU
↳ BÚNO

– TITO 3 SOUSEDÉ MEZI SEBOU BUĎ MAJÍ ČERVENOU HRANU ($\Rightarrow$ ČERVENÉ K_3) NEBO NE ($\Rightarrow$ MODRÉ K_3)



– PRO K_5 NEPLATÍ:



– PRO $k, \ell \in \mathbb{N}$ BUĎ $R(k,\ell)$ NEJMENŠÍ $N \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE KAŽDÉ 2-OBARVENÍ $E(K_N)$ OBSAHUJE ČERVENÉ K_k ČI MODRÉ K_ℓ JAKO PODGRAF

↓ BÚNO ČERVENOU A MODROU BARVOU

– TEDY KAŽDÝ GRAF G S $\geq R(k,\ell)$ VRCHOLY OBSAHUJE K_k ČI JEHO DOPLNĚK $\overline{G}$ OBSAHUJE K_ℓ JAKO PODGRAF

VĚTA 3 (RAMSEYOVA VĚTA PRO 2 BARVY):

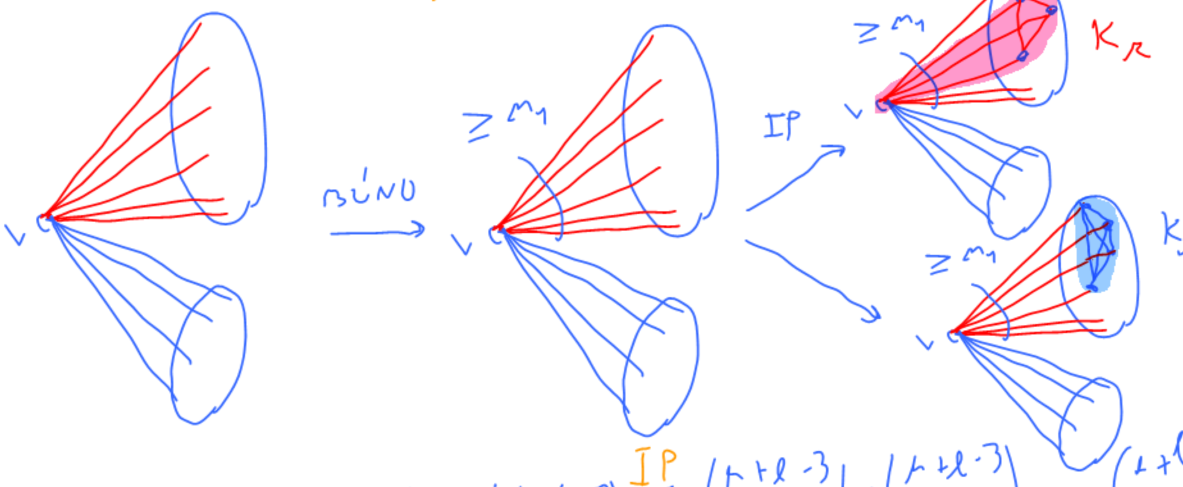
$\forall k, l \in \mathbb{N}$: $R(k,l)$ JE KONEČNÉ. DOKONCE $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{l-1}$

- RAMSEYOVU VĚTU (V OBECNĚJŠÍM ZNĚNÍ) DOKÁZAL RAMSEY (1928), UVEDENÝ ODHAD DOKÁZALI ERDŐS A SZEKERES (1935), KTEŘÍ JI OBJEVILI NEZÁVISLE (1

- DK:
  - INDUKCÍ PODLE $k+l$
  - ZAČÁTEK INDUKCE:
    - JE-LI $k=1$ NEBO $l=1$, PAK $R(k,l)=1$
      ↳ CHCEME 1-BAREVNÉ K_1, COŽ JE LIBOVOLNÝ VRCHOL
  - INDUKČNÍ KROK:
    - NECHŤ $k \geq 2$ A $l \geq 2$
    - PODLE IP $R(k-1,l) \leq \binom{k+l-3}{k-2}$ A $R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-1}$
    - UKÁŽEME, ŽE $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$
    - MĚJME $N \geq R(k-1,l) + R(k,l-1)$ VRCHOLŮ A ZVOLME $v \in V(K_N)$
    - PROTOŽE $N \geq \underset{\text{ZA VRCHOL } v}{1} + 1 + \Big(\underbrace{(R(k-1,l)-1)}_{m_1-1} + \underbrace{(R(k,l-1)-1)}_{m_2-1}\Big)$, PAK PODLE

VĚTY 2 EXISTUJE BUĎ $\geq m_1$ VRCHOLŮ SPOJENÝCH S v ČERVENOU HRANOU NEBO $\geq m_2$ VRCHOLŮ SPOJENÝCH S v MODROU HRANOU

- BÚNO v MÁ $\geq m_1 = R(k-1,l)$ ČERVENÝCH SOUSEDŮ
  $\Rightarrow$ ČERVENÍ SOUSEDÉ MEZI SEBOU OBSAHUJÍ BUĎ ČERVENÉ K_{k-1} (TO SPOLU S v TVOŘÍ ČERVENÉ K_k $\Rightarrow$ JSME HOTOVI)
  NEBO MODRÉ K_l
  ↳ PAK JSME HOTOVI



$\Rightarrow R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) \overset{IP}{\leq} \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$ ∎

– Určit Ramseyovská čísla $R(k,l)$ přesně je velice obtížné (už pro malé případy)

– není známý žádný vzorec

– známá netriviální Ramseyovská čísla $R(k,k)$:
$R(3,3)=6$
$R(4,4)=18$
$43 \le R(5,5) \le 48$
$102 \le R(4,6) \le 165$

– Jak přesný je odhad $R(k,k) \le \binom{2k-2}{k-1} \le 4^k$?

– dlouho dobu nebyl známý lepší než polynomiální odhad

– Erdős (1947) ukázal, že $R(k,k)$ roste exponenciálně pomocí pravděpodobnostního argumentu

– **Věta 4:**

$$\forall k \ge 3: \ R(k,k) > 2^{k/2}.$$

Dk:

– mějme $N < 2^{k/2}$

– uvažme náhodné 2-obarvení χ hran z $E(K_N)$:

$$\forall e \in E(K_N): \ \chi(e) = \begin{cases} \text{červená} & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2} \\ \text{modrá} & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2} \end{cases}$$

(náhodně, nezávisle)

– pro $\forall K \in \binom{V(K_N)}{k}$ označme jev A_K = „K indukuje 1-barevné K_k v χ"

$\Rightarrow \Pr(A_K) = 2^{1-\binom{k}{2}}$

$\hookrightarrow \Pr(\text{všechny hrany jsou červené}) = 2^{-\binom{k}{2}}$ a totéž pro modrou

– $p = \Pr(\text{v } \chi \ \exists \text{ 1-barevné } K_k)$

– chceme ukázat, že $p < 1$, pak totiž $\exists \chi$ bez 1-barevného K_k a máme $R(k,k) > N$

průnik jevů určitých p není jistý

– platí

$$p \le \sum_{K \in \binom{V(K_N)}{k}} \Pr(A_K) = \sum_{K \in \binom{V(K_N)}{k}} 2^{1-\binom{k}{2}} = \binom{N}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \le$$

„union bound"

odhad $\binom{N}{k} \le \frac{N^k}{2^{k/2+1}}$, plyne z odhadu $\binom{N}{k} \le \frac{N^k}{k!}$ z 1. přednášky (pro $k \ge 3$)

$$\le \frac{N^k}{2^{k/2+1}} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}-1} = N^k \cdot 2^{-k^2/2} < 1$$

$\hookrightarrow$ pro $N < 2^{k/2}$ ⊠

$$\Rightarrow \ \underline{\underline{\sqrt{2}^k \le R(k,k) \le 4^k}}$$

– odhady se příliš vylepšit nelze

nejlepší dolní odhad: $R(k,k) \ge (1-o(1))\frac{\sqrt{2}\,k}{e} 2^{k/2}$

– **otevřený problém** (100 \$): $\exists \lim\limits_{k\to\infty} R(k,k)^{1/k}$?

$\hookrightarrow$ pokud ano, pak $\in [\sqrt{2}, 4]$