(1)

- **ODHADY FAKTORIÁLU:**
- **FAKTORIÁL** $n!$ $= n(n-1)\cdots 2\cdot 1 =$ POČET BIJEKCÍ $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$
  - VŠE, CO POTŘEBUJEME VĚDĚT, ALE ŠPATNĚ SE S NÍM POČÍTÁ
  - UKÁŽEME SI NĚKOLIK ODHADŮ ↳ JAK ROSTE $n^n/n!$?
- **TVRZENÍ 1:**

$$\forall n \in \mathbb{N}: n^{n/2} \le n! \le n^n$$

- DK:
  - i) HORNÍ ODHAD

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{i}_{\le n} \le \prod_{i=1}^{n} n = \underline{\underline{n^n}}$$

  - ii) DOLNÍ ODHAD:
    - POUŽIJEME NEROVNOST $\forall i = 1,\dots,n: i(n+1-i) \ge n$
      - PLATÍ PRO $i = 1, n$
      - $2 \le i \le \lceil \frac{n}{2} \rceil \Rightarrow (n+1-i) \ge \frac{n}{2}$
      - $\lceil \frac{n}{2} \rceil \le i \le n-1 \Rightarrow (n+1-i) \ge 2$

      $\Rightarrow$ PLATÍ PRO $2 \le i \le n-1$

$$\Rightarrow n!\cdot n! = \underbrace{n\cdot 1}\cdot\underbrace{(n-1)\cdot 2}\cdots\underbrace{2\cdot(n-1)}\cdot\underbrace{1\cdot n} = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i) \ge$$

$$\ge \prod_{i=1}^{n} n = n^n \Rightarrow n! \ge \underline{\underline{n^{n/2}}}$$

⊠

- DOKÁŽEME SILNĚJŠÍ ODHADY
- **VĚTA 1:**

PRO $\forall n \in \mathbb{N}$, $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\cdot n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\quad (e = 2{,}71828\dots)$

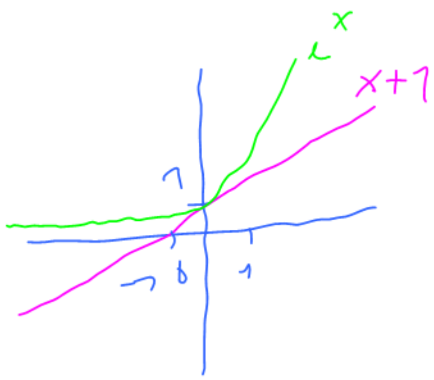
- **LEMMA 1:**

PRO $\forall x \in \mathbb{R}: 1 + x \le e^x$

- DŮLEŽITÝ ODHAD!

- DŮKAZ:

$f(x) := e^x - (x+1)$ - CHCEME UKÁZAT, ŽE $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \ge 0$



$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ - 0 JE STACIONÁRNÍ BOD

$f''(x) = e^x$

$f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ V BODĚ $x = 0$ JE GLOBÁLNÍ MINIMUM f

$\Rightarrow f(x) \ge 0$ PRO $\forall x \in \mathbb{R}$

⊠

- UKÁŽEME DVA DŮKAZY VĚTY 1
- 1. DŮKAZ VĚTY 1 (INDUKCÍ):

a) HORNÍ ODHAD:

- PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = 1! \leq e\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1\right)$
- NECHŤ $n \geq 2$
- $n! = n\cdot \underbrace{(n-1)!}_{} \overset{IP}{\leq} n\cdot \underbrace{e\cdot(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}_{} =$

$$= e\cdot n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot \underbrace{e\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{\text{CHCEME } \leq 1}$$

- $e\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{} \overset{\text{LEMMA 1}}{\leq} e\cdot\underbrace{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n}_{} = \underline{\underline{1}}$

LEMMA 1 PRO $x := -1/n$

b) DOLNÍ ODHAD:

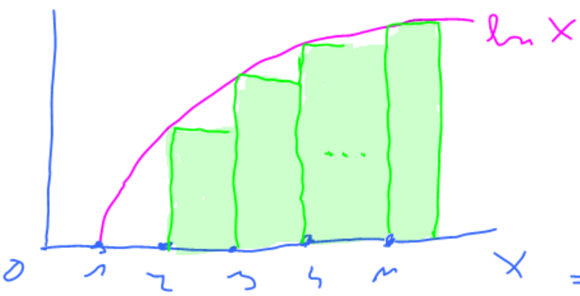
- PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = e\left(\frac{1}{e}\right)^1 \leq 1! = 1\right)$
- NECHŤ $n \geq 2$
- $n! = n\underbrace{(n-1)!}_{} \overset{IP}{\geq} n\cdot\underbrace{e\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}_{} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\underbrace{e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}_{\text{CHCEME } \geq 1}$
- $e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \geq 1 \iff \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq 1$

$$\frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{} \overset{\text{LEMMA 1}}{\leq} \frac{1}{e}\underbrace{\left(e^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}}_{} = \underline{\underline{1}}$$

LEMMA 1 S $x := 1/(n-1)$

$\boxtimes$

- 2. DŮKAZ VĚTY 1 (INTEGRÁLEM):
  - POUZE HORNÍ ODHAD (DOLNÍ ODHAD ANALOGICKY)
  - $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 \Rightarrow \ln(n!) = \underbrace{\ln(n)+\ln(n-1)+\cdots+\ln(2)+\ln(1)}_{\text{PLOCHA ZELENÝCH OBDÉLNÍKŮ}} \leq$



PLOCHA POD $\ln x$

$$\leq \int_1^{n+1} \ln x\, dx = (n+1)\ln(n+1) - n$$

$$\Rightarrow n! = n(n-1)! = n\cdot e^{\ln((n-1)!)} \leq n\cdot \underbrace{e^{n\ln n}}_{=n^n} e^{-(n-1)} =$$

$$= \underline{ne\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

$\boxtimes$

- NEJSILNĚJŠÍ ZNÁMÝ ODHAD
- **VĚTA 2** (**STIRLINGOVA FORMULE**):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

↳ ZNAČÍ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

- DOKÁZAL DE MOIVRE, STIRLING URČIL KONSTANTU

- BEZ DŮKAZU

- **ODHADY KOMBINAČNÍCH ČÍSEL**:
  - $n, k \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ – POČET VÝBĚRŮ NEUSPOŘÁDANÝCH k-TIC Z n-TIC

- **POZOROVÁNÍ 1**:

(i) $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$: $\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leq \dbinom{n}{k} \leq n^k$ (HODÍ SE PRO $n \gg k$)

(ii) NEJVĚTŠÍ KOMBINAČNÍ ČÍSLO PRO DANÉ n JE $\dbinom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \dbinom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

A PLATÍ $\dfrac{2^n}{n+1} \leq \dbinom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$

DK: (i) $\dbinom{n}{k} = \prod\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{n-i}{k-i}$ A $\dfrac{n-i}{k-i} \leq n \Rightarrow \dbinom{n}{k} \leq n^k$

$\dfrac{n-i}{k-i} \geq \dfrac{n}{k}$ PRO $n \geq k$ A $i \in \{0, \dots, k-1\}$

$\Rightarrow \dbinom{n}{k} \geq \left(\dfrac{n}{k}\right)^k$

(ii) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{k-1} \underbrace{\dfrac{n+1-k}{k}}$ > 1 PRO $k < \dfrac{n+1}{2}$, < 1 PRO $k > \dfrac{n+1}{2}$

$\Rightarrow$ PRO $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil$ FUNKCE $\binom{n}{k}$ NABÝVÁ MAXIMA

- **BINOMICKÁ VĚTA** $\Rightarrow \dfrac{2^n}{n+1} \leq \dbinom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq 2^n$

☒

- VĚTA 3:

  PRO $\forall m \in \mathbb{N}$: $$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \le \binom{2m}{m} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

- DŮKAZ VĚTY 3:
  - DEFINUJME $$P := \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2m}$$
  - POTOM $$P \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2m}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$ A TEDY $P = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}$

  $\Rightarrow$ CHCEME $$\frac{1}{2\sqrt{m}} \overset{(ii)}{\le} P \overset{(i)}{\le} \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

  (i) UVAŽME $$1 > \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right) =$$
  $$= \left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\right) = (2m+1)P^2$$
  $$\Rightarrow P < \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

  (ii) UVAŽME $$1 > \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m-1)^2}\right) =$$
  $$= \left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-2)(2m)}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2\cdot 2m\cdot P^2}$$
  $$\Rightarrow P > \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

  $\boxtimes$

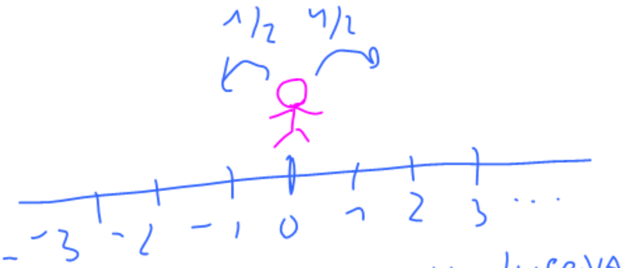
- STIRLINGOVA FORMULE $\Rightarrow$ $$\binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

- $\forall m, k \in \mathbb{N}$ S $m \ge k$ PLATÍ $$\binom{m}{k} \le \left(\frac{em}{k}\right)^k$$
  - BEZ DŮKAZU

– **APLIKACE:**

1) ODHAD $\binom{2n}{n}$ JE ZÁKLADEM JEDNOHO Z NEJJEDNODUŠŠÍCH DŮKAZŮ **BERTRANDOVA POSTULÁTU** ($\forall n\ \exists$ PRVOČÍSLO p S $n < p \le 2n$)

2) **NÁHODNÉ PROCHÁZKY:**



– STOJÍME V 0 NA OSE $\mathbb{Z}$

– V $\forall$ KROKU NÁHODNĚ NEZÁVISLE UDĚLÁME KROK DOLEVA/DOPRAVA S PSTÍ 1/2

– n KROKŮ CELKEM, $n \longrightarrow \infty$

– KOLIKRÁT SE VRÁTÍME DO 0?

– NÁHODNÁ VELIČINA $X = I_{A_2} + I_{A_4} + \dots$, KDE $I_{A_{2m}}$ JE INDIKÁTOROVÁ VELIČINA JEVU A_{2m} = „PO $2m$ KROCÍCH JSME V 0"

– $$P(A_{2m}) = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}} \overset{\text{VĚTA 3}}{\ge} \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

VÝBĚR m KROKŮ DOLEVA, ZBYLÝCH m KROKŮ DOPRAVA S $2m$ KROKY

2^{2m} – CELKOVÝ POČET PROCHÁZEK

$X = \sum_{m=1} I_{A_{2m}}$

– $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{\infty} I_{A_{2m}}\right] \overset{\text{LINEARITA } \mathbb{E}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_{A_{2m}}] = \sum_{m=1} P(A_{2m}) \ge \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{m}} \longrightarrow \infty$$

$\mathbb{E}[I_{A_{2m}}] = P(A_{2m})$ Z DEFINICE INDIKÁTOROVÉ VELIČINY

$\Rightarrow$ STŘEDNÍ HODNOTA POČTU NÁVRATŮ ROSTE DO NEKONEČNA

– V $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ TAKÉ $\mathbb{E}[X] \longrightarrow \infty$

V $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ UŽ NE!

$$p(d) := P[\text{VRÁTÍME SE DO POČÁTKU V } \mathbb{Z}^d] \begin{cases} = 1 & d \in \{1,2\} \\ < 1 & d \ge 3 \end{cases}$$

(**PÓLYOVA VĚTA**)

($p(3) \approx 0{,}34$)