Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

13. přednáška

21. května 2019

Samoopravné kódy

Připomenutí z minula

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.
- Kód = podmnožina $C \subseteq \Sigma^n$ s kódovými slovy.

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.
- Kód = podmnožina $C \subseteq \Sigma^n$ s kódovými slovy.
- V C jsme schopni opravit $\leq t$ chyb, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ s $d(x, y) \leq t$.

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.
- Kód = podmnožina $C \subseteq \Sigma^n$ s kódovými slovy.
- V C jsme schopni opravit $\leq t$ chyb, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ s $d(x, y) \leq t$.
- Parametry kódu: $(n, k, d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.
- Kód = podmnožina $C \subseteq \Sigma^n$ s kódovými slovy.
- V C jsme schopni opravit $\leq t$ chyb, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ s $d(x, y) \leq t$.
- Parametry kódu: $(n, k, d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Příklady kódů:

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.
- Kód = podmnožina $C \subseteq \Sigma^n$ s kódovými slovy.
- V C jsme schopni opravit $\leq t$ chyb, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ s $d(x, y) \leq t$.
- Parametry kódu: $(n, k, d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Příklady kódů:
  - Opakovací kód $C = \{1 \cdots 1, 2 \cdots 2, \ldots, q \cdots q\}$,

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.
- Kód = podmnožina $C \subseteq \Sigma^n$ s kódovými slovy.
- V C jsme schopni opravit $\leq t$ chyb, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ s $d(x, y) \leq t$.
- Parametry kódu: $(n, k, d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Příklady kódů:
  - Opakovací kód $C = \{1 \cdots 1, 2 \cdots 2, \ldots, q \cdots q\}$,
  - kód z Fanovy roviny $C = \{\text{charakteristické vektory přímek}\}$,

Připomenutí z minula

- Přenos dat, vzniklé chyby chceme detekovat a opravit.
- Abeceda = množina Σ s q symboly, slovo délky n = uspořádaná n-tice symbolů, Σ^n = množina slov délky n nad Σ.
- Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma^n$ je $d(x, y) = |\{i \colon x_i \neq y_i\}|$.
- Kód = podmnožina $C \subseteq \Sigma^n$ s kódovými slovy.
- V C jsme schopni opravit $\leq t$ chyb, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ s $d(x, y) \leq t$.
- Parametry kódu: $(n, k, d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Příklady kódů:
  - Opakovací kód $C = \{1 \cdots 1, 2 \cdots 2, \ldots, q \cdots q\}$,
  - kód z Fanovy roviny $C = \{$charakteristické vektory přímek$\}$,
  - Hadamardův kód $C = \{$řádky $H \colon H \cdot H^\top = n \cdot I_n\} \cup \{$řádky $-H\}$.

Připomenutí z minula: lineární kódy

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.
- Parametry: $[n, k, d]_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.
- Parametry: $[n, k, d]_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Víme, že $|C| = \left|\mathbb{F}_q^{\dim(C)}\right| = q^k$ a $d = \min_{x \in C \setminus \{0\}} d(x, 0)$.

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.
- Parametry: $[n, k, d]_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Víme, že $|C| = \left|\mathbb{F}_q^{\dim(C)}\right| = q^k$ a $d = \min_{x \in C \setminus \{0\}} d(x, 0)$.
- Příklady lineárních kódů:

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.
- Parametry: $[n, k, d]_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Víme, že $|C| = \left|\mathbb{F}_q^{\dim(C)}\right| = q^k$ a $d = \min_{x \in C \setminus \{0\}} d(x, 0)$.
- Příklady lineárních kódů:
  - Opakovací kód je lineární,

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.
- Parametry: $[n, k, d]_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Víme, že $|C| = \left|\mathbb{F}_q^{\dim(C)}\right| = q^k$ a $d = \min_{x \in C \setminus \{0\}} d(x, 0)$.
- Příklady lineárních kódů:
  - Opakovací kód je lineární,
  - kód z Fanovy roviny lineární není, ale jeho rozšíření o $1 \cdots 1$ a doplňky je,

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.
- Parametry: $[n, k, d]_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Víme, že $|C| = \left|\mathbb{F}_q^{\dim(C)}\right| = q^k$ a $d = \min_{x \in C \setminus \{0\}} d(x, 0)$.
- Příklady lineárních kódů:
  - Opakovací kód je lineární,
  - kód z Fanovy roviny lineární není, ale jeho rozšíření o $1 \cdots 1$ a doplňky je,
  - Hadamardův kód obecně lineární není (ale ten ze Sylvesterovy konstrukce je).

Připomenutí z minula: lineární kódy

- Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, kde $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q.
- Parametry: $[n, k, d]_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C}\{d(x, y)\}$.
- Víme, že $|C| = \left|\mathbb{F}_q^{\dim(C)}\right| = q^k$ a $d = \min_{x \in C \setminus \{0\}} d(x, 0)$.
- Příklady lineárních kódů:
  - Opakovací kód je lineární,
  - kód z Fanovy roviny lineární není, ale jeho rozšíření o $1 \cdots 1$ a doplňky je,
  - Hadamardův kód obecně lineární není (ale ten ze Sylvesterovy konstrukce je).
- S lineárními kódy umíme efektivněji kódovat i dekódovat.

Kód s parametry $[7, 4, 3]_2$ z Fanovy roviny

Kód s parametry $[7, 4, 3]_2$ z Fanovy roviny

- Z Fanovy roviny:

1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010, 1111111

0011110, 1111000, 0101011, 0110101, 1100110, 1010011, 1001101, 0000000

Kód s parametry $[7, 4, 3]_2$ z Fanovy roviny

- Z Fanovy roviny:

$1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010, 1111111$

$0011110, 1111000, 0101011, 0110101, 1100110, 1010011, 1001101, 0000000$

- Ekvivalentní kód:

Generující matice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrolní matice:

$$M^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kód s parametry $[7, 4, 3]_2$ z Fanovy roviny

- Z Fanovy roviny:

$1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010, 1111111$

$0011110, 1111000, 0101011, 0110101, 1100110, 1010011, 1001101, 0000000$

- Ekvivalentní kód:

Generující matice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrolní matice:

$$M^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Kódování: $z = (1, 0, 1, 1)^{\top} \to x = M^{\top} z = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)^{\top}$.

Kód s parametry $[7, 4, 3]_2$ z Fanovy roviny

- Z Fanovy roviny:

$1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010, 1111111$

$0011110, 1111000, 0101011, 0110101, 1100110, 1010011, 1001101, 0000000$

- Ekvivalentní kód:

Generující matice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrolní matice:

$$M^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Kódování: $z = (1, 0, 1, 1)^{\top} \to x = M^{\top} z = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)^{\top}$.
- Dekódování: $y = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)^{\top} \to s(y) = M^{\perp} y = (1, 0, 1)^{\top}$.

Kód s parametry $[7, 4, 3]_2$ z Fanovy roviny

- Z Fanovy roviny:

$1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010, 1111111$

$0011110, 1111000, 0101011, 0110101, 1100110, 1010011, 1001101, 0000000$

- Ekvivalentní kód:

Generující matice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrolní matice:

$$M^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Kódování: $z = (1, 0, 1, 1)^{\top} \to x = M^{\top} z = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)^{\top}$.
- Dekódování: $y = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)^{\top} \to s(y) = M^{\perp} y = (1, 0, 1)^{\top}$.

$s^{-1}(s(y)) = s^{-1}((1, 0, 1)^{\top}) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^{\top} \in B(0, 1)$

Kód s parametry $[7, 4, 3]_2$ z Fanovy roviny

- Z Fanovy roviny:

$1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010, 1111111$

$0011110, 1111000, 0101011, 0110101, 1100110, 1010011, 1001101, 0000000$

- Ekvivalentní kód:

Generující matice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrolní matice:

$$M^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Kódování: $z = (1, 0, 1, 1)^{\top} \to x = M^{\top} z = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)^{\top}$.
- Dekódování: $y = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)^{\top} \to s(y) = M^{\perp} y = (1, 0, 1)^{\top}$.

$$s^{-1}(s(y)) = s^{-1}((1, 0, 1)^{\top}) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^{\top} \in B(0, 1)$$

$$x = y - s^{-1}(s(y)) = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)^{\top} - (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^{\top}$$

$$= (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)^{\top} \ \to \ z = (1, 0, 1, 1)^{\top}$$

Zkoušky

Zkoušky

- Průběh zkoušky:
  - Ústní s písemnou přípravou. Maximálně na 4 hodiny (09:00–13:00 nebo 14:00–18:00).
  - 5 otázek, z toho 3 na ověření základních pojmů a jejich aplikace, 1 na ověření znalosti důkazů z přednášky a 1 přehledová.

Zkoušky

- Průběh zkoušky:
  - Ústní s písemnou přípravou. Maximálně na 4 hodiny (09:00–13:00 nebo 14:00–18:00).
  - 5 otázek, z toho 3 na ověření základních pojmů a jejich aplikace, 1 na ověření znalosti důkazů z přednášky a 1 přehledová.
  - Vzorové zadání je na stránkách přednášky.

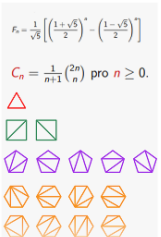
Zkoušky

- Průběh zkoušky:
  - Ústní s písemnou přípravou. Maximálně na 4 hodiny (09:00–13:00 nebo 14:00–18:00).
  - 5 otázek, z toho 3 na ověření základních pojmů a jejich aplikace, 1 na ověření znalosti důkazů z přednášky a 1 přehledová.
  - Vzorové zadání je na stránkách přednášky.
- Termíny:
  - 28.5. – dopoledne + odpoledne
  - 31.5. – dopoledne + odpoledne
  - 5.6. – dopoledne + odpoledne
  - 7.6. – dopoledne + odpoledne
  - 12.6. – dopoledne + odpoledne
  - 13.6. – dopoledne + odpoledne
  - 25.6. – dopoledne

Zkoušky

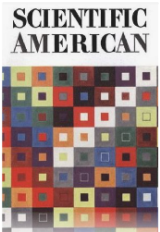
- Průběh zkoušky:
  - Ústní s písemnou přípravou. Maximálně na 4 hodiny (09:00–13:00 nebo 14:00–18:00).
  - 5 otázek, z toho 3 na ověření základních pojmů a jejich aplikace, 1 na ověření znalosti důkazů z přednášky a 1 přehledová.
  - Vzorové zadání je na stránkách přednášky.
- Termíny:
  - 28.5. – dopoledne + odpoledne
  - 31.5. – dopoledne + odpoledne
  - 5.6. – dopoledne + odpoledne
  - 7.6. – dopoledne + odpoledne
  - 12.6. – dopoledne + odpoledne
  - 13.6. – dopoledne + odpoledne
  - 25.6. – dopoledne
- Rozsah: vše, co jsme probrali (viz rozpis jednotlivých přednášek).

Odhady faktoriálu



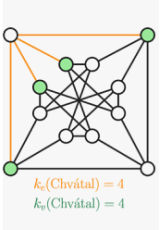
Vytvořující funkce

Konečné projektivní roviny

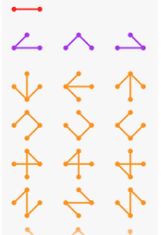


Latinské čtverce

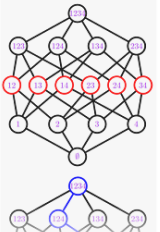
Toky v sítích



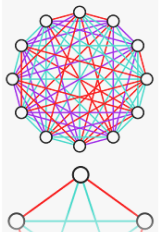
Grafová souvislost



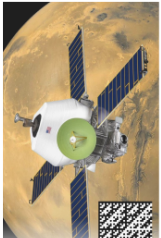
Počet koster



Spernerova věta

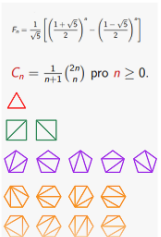


Ramseyova teorie



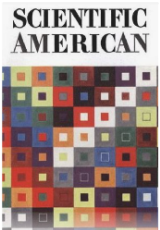
Kódy

Odhady faktoriálu



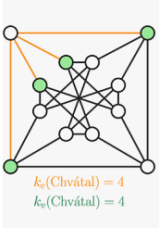
Vytvořující funkce

Konečné projektivní roviny

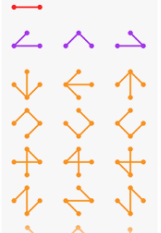


Latinské čtverce

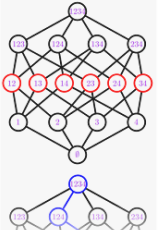
Toky v sítích



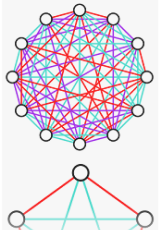
Grafová souvislost



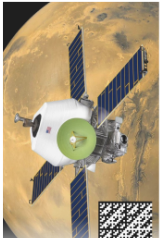
Počet koster



Spernerova věta



Ramseyova teorie



Kódy

Děkuji za pozornost a přeji hodně štěstí u zkoušek.