

Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

1. přednáška

19. února 2019



Základní informace

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskrétní matematiky“).

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskrétní matematiky“).
- **Stránky přednášky:** *kam.mff.cuni.cz/~balko/kg11819*
 - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskrétní matematiky“).
- **Stránky přednášky:** *kam.mff.cuni.cz/~balko/kg11819*
 - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- **Cvičení:**
 - pondělí, 15:40 v S11 (**J. Fiala**),
 - pátek, 9:00 v T9 (**J. Fiala**),
 - pátek, 10:40 v S7 (**M. Balko**),
 - pátek, 10:40 v T5 (**J. Fiala**).

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskretní matematiky“).
- **Stránky přednášky:** kam.mff.cuni.cz/~balko/kg11819
 - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- **Cvičení:**
 - pondělí, 15:40 v S11 ([J. Fiala](#)),
 - pátek, 9:00 v T9 ([J. Fiala](#)),
 - pátek, 10:40 v S7 ([M. Balko](#)),
 - pátek, 10:40 v T5 ([J. Fiala](#)).
- **Doporučená literatura:**
 - [J. Matoušek](#) a [J. Nešetřil](#): Kapitoly z diskretní matematiky.
 - [J. Matoušek](#) a [T. Valla](#): Kombinatorika a grafy I.
 - [T. Kaiser](#): Přednáška „Samoopravné kódy“.

Zápočet a zkouška

Zápočet a zkouška

- Podmínky k získání zápočtu:
 - zisk ≥ 100 bodů z celkových zhruba 150 bodů (tedy zhruba 2/3),
 - krátká písemka na začátku každého cvičení (vyjma prvního),
 - týdenní domácí úlohy,
 - zápočet je nutnou podmínkou účasti u zkoušky.

Zápočet a zkouška

- Podmínky k získání zápočtu:
 - zisk ≥ 100 bodů z celkových zhruba 150 bodů (tedy zhruba 2/3),
 - krátká písemka na začátku každého cvičení (vyjma prvního),
 - týdenní domácí úlohy,
 - zápočet je nutnou podmínkou účasti u zkoušky.

- Průběh zkoušky:
 - ústní s písemnou přípravou,
 - 5 otázek, z toho 3 na ověření základních pojmů a jejich aplikace, 1 na ověření znalosti důkazů z přednášky a 1 přehledová.

Syllabus

Sylabus

- Předběžný plán:

Sylabus

- **Předběžný plán:**
 - odhady faktoriálu a binomických koeficientů,
 - vytvářející funkce a jejich aplikace,
 - konečné projektivní roviny a latinské čtverce,
 - toky v sítích (minimaxová věta),
 - Hallova věta a její aplikace,
 - Ušaté lemma, struktura 2-souvislých grafů,
 - počet koster úplného grafu,
 - dvojí počítání (počet koster $K_n - e$, Spernerova věta),
 - základní Ramseyovy věty,
 - samoopravné kódy.

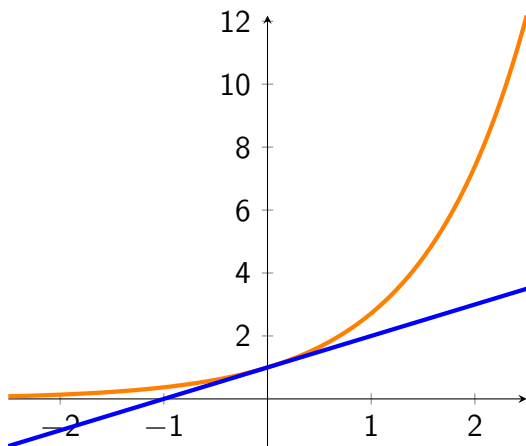
Sylabus

- **Předběžný plán:**
 - odhady faktoriálu a binomických koeficientů,
 - vytvářející funkce a jejich aplikace,
 - konečné projektivní roviny a latinské čtverce,
 - toky v sítích (minimaxová věta),
 - Hallova věta a její aplikace,
 - Ušaté lemma, struktura 2-souvislých grafů,
 - počet koster úplného grafu,
 - dvojí počítání (počet koster $K_n - e$, Spernerova věta),
 - základní Ramseyovy věty,
 - samoopravné kódy.
- „Průchod kombinatorikou do šířky“, rozšiřující témata na přednáškách **KAM** a **IÚUK**.

Odhady faktoriálu

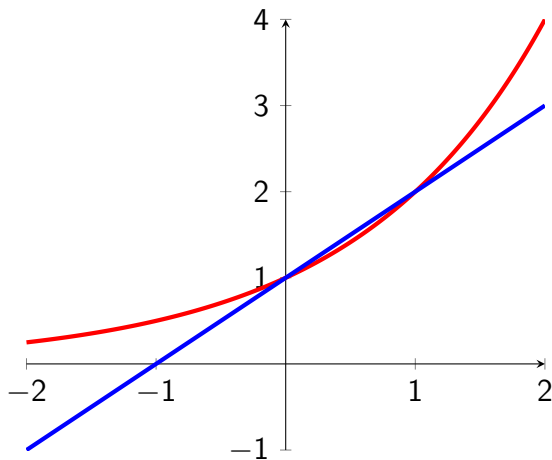
$$1 + x \leq e^x$$

$$1 + x \leq e^x$$



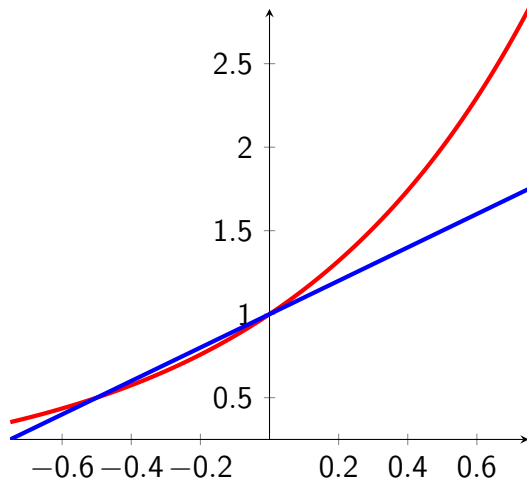
Obrázek: Funkce e^x a $1 + x$.

$$1 + x \leq e^x$$



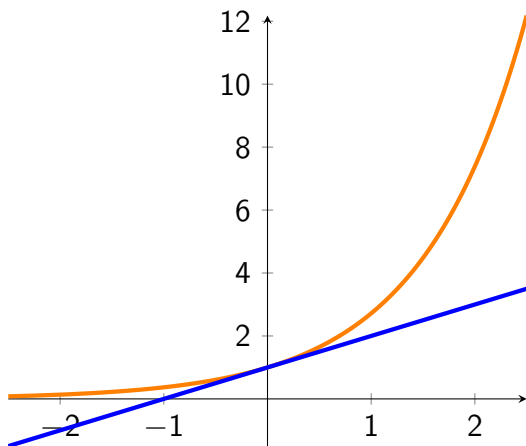
Obrázek: Funkce 2^x a $1 + x$.

$$1 + x \leq e^x$$



Obrázek: Funkce e^x a $1 + x$.

$$1 + x \leq e^x$$

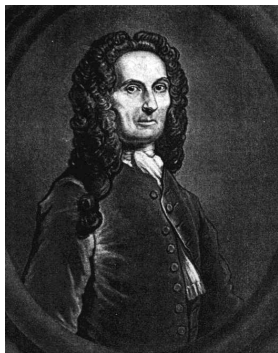


Obrázek: Funkce e^x a $1 + x$.

Stirlingův vzorec

Stirlingův vzorec

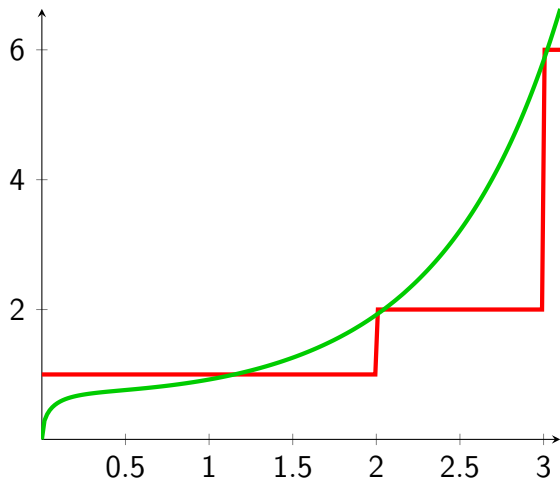
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$



Obrázek: James Stirling (1692–1770) a Abraham de Moivre (1667–1754).

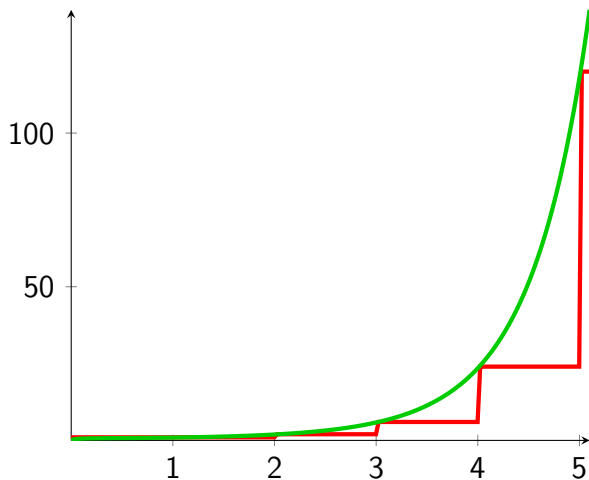
Zdroje: <http://hemarino18.wixsite.com/jamesstirling> a <https://cs.wikipedia.org>

Stirlingův vzorec



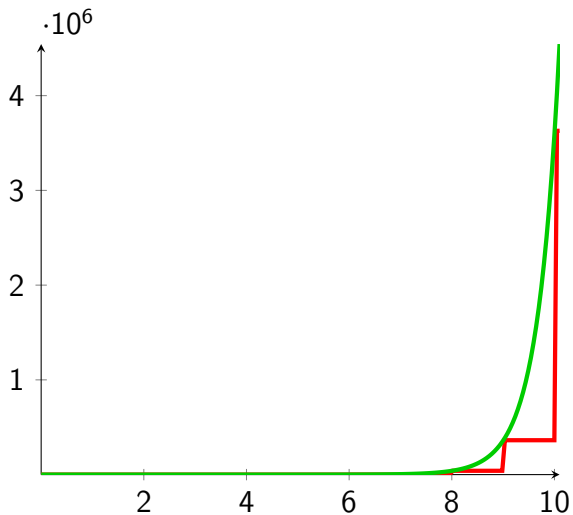
Obrázek: Funkce $\Gamma(x)$ a $\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$.

Stirlingův vzorec



Obrázek: Funkce $[x]!$ a $\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$.

Stirlingův vzorec



Obrázek: Funkce $[x]!$ a $\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$.

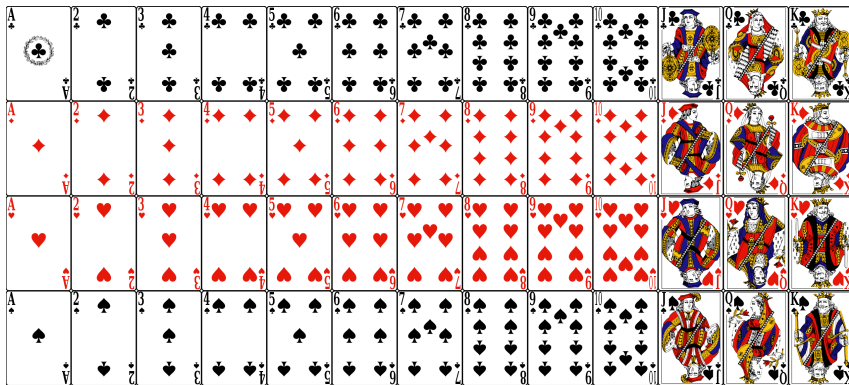
Velikost čísla 52!

Velikost čísla 52!

- $52!$ = počet možných zamíchání kanastových karet

Velikost čísla 52!

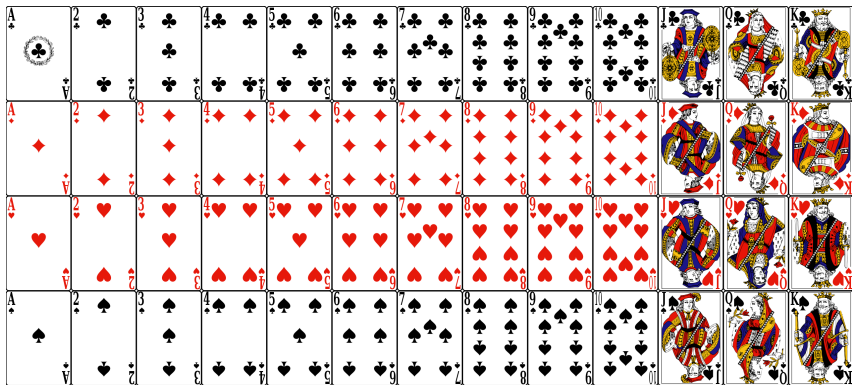
- $52!$ = počet možných zamíchání kanastových karet



Zdroj: <https://cs.wikipedia.org>

Velikost čísla 52!

- $52!$ = počet možných zamíchání kanastových karet



Zdroj: <https://cs.wikipedia.org>

- Jak velké je toto číslo?
 - <https://czep.net/weblog/52cards.html>

Velikost čísla 52!

-
- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505\ 440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$
-

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358$
 $362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907$
 $575\ 296 \approx 10^{89}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505$
 $440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358\ 362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907\ 575\ 296 \approx 10^{89}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505\ 440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

- $52^{26} = 413\ 130\ 191\ 675\ 859\ 211\ 796\ 859\ 746\ 472\ 546\ 052\ 775\ 870\ 464 \approx 10^{44}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358$
 $362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907$
 $575\ 296 \approx 10^{89}$
- $52e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 629\ 736\ 165\ 788\ 788\ 226\ 963\ 798\ 462\ 179\ 958\ 085\ 486$
 $745\ 268\ 375\ 626\ 089\ 182\ 872\ 704\ 797\ 360 \approx 10^{68}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505$
 $440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

- $52^{26} = 413\ 130\ 191\ 675\ 859\ 211\ 796\ 859\ 746\ 472\ 546\ 052\ 775\ 870$
 $464 \approx 10^{44}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358$
 $362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907$
 $575\ 296 \approx 10^{89}$
- $52e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 629\ 736\ 165\ 788\ 788\ 226\ 963\ 798\ 462\ 179\ 958\ 085\ 486$
 $745\ 268\ 375\ 626\ 089\ 182\ 872\ 704\ 797\ 360 \approx 10^{68}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505$
 $440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

- $e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 12\ 110\ 310\ 880\ 553\ 619\ 749\ 303\ 816\ 580\ 383\ 809\ 336\ 283$
 $562\ 853\ 377\ 424\ 791\ 978\ 321\ 246\ 103 \approx 10^{67}$
- $52^{26} = 413\ 130\ 191\ 675\ 859\ 211\ 796\ 859\ 746\ 472\ 546\ 052\ 775\ 870$
 $464 \approx 10^{44}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358$
 $362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907$
 $575\ 296 \approx 10^{89}$
- $52e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 629\ 736\ 165\ 788\ 788\ 226\ 963\ 798\ 462\ 179\ 958\ 085\ 486$
 $745\ 268\ 375\ 626\ 089\ 182\ 872\ 704\ 797\ 360 \approx 10^{68}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505$
 $440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

- $\sqrt{104\pi}\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 80\ 529\ 020\ 383\ 886\ 612\ 857\ 810\ 199\ 580\ 012\ 764$
 $961\ 409\ 004\ 334\ 781\ 435\ 987\ 268\ 084\ 328\ 737 \approx 10^{67}$
- $e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 12\ 110\ 310\ 880\ 553\ 619\ 749\ 303\ 816\ 580\ 383\ 809\ 336\ 283$
 $562\ 853\ 377\ 424\ 791\ 978\ 321\ 246\ 103 \approx 10^{67}$
- $52^{26} = 413\ 130\ 191\ 675\ 859\ 211\ 796\ 859\ 746\ 472\ 546\ 052\ 775\ 870$
 $464 \approx 10^{44}$

Odhady binomických koeficientů

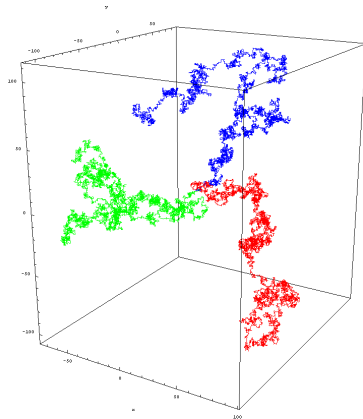
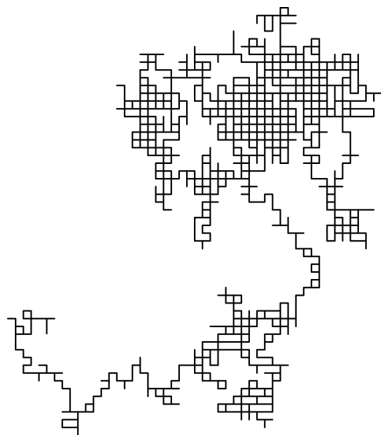
Náhodné procházky

Náhodné procházky

- Náhodné procházky lze uvážit i ve vícedimenzionálních mřížkách.

Náhodné procházky

- Náhodné procházky lze uvážit i ve vícedimenzionálních mřížkách.

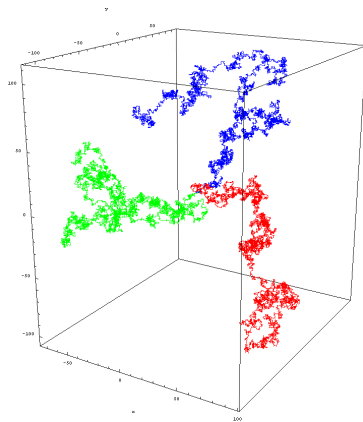
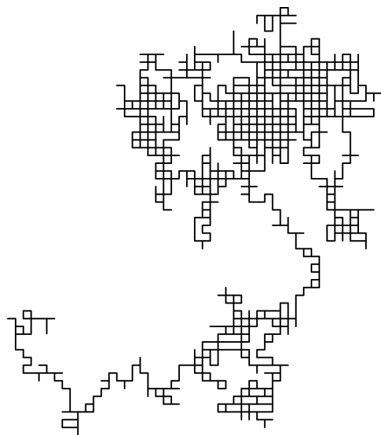


Obrázek: Náhodné procházky v \mathbb{Z}^2 a \mathbb{Z}^3 .

Zdroj: <https://cs.wikipedia.org>

Náhodné procházky

- Náhodné procházky lze uvážit i ve vícedimenzionálních mřížkách.



Obrázek: Náhodné procházky v \mathbb{Z}^2 a \mathbb{Z}^3 .

Zdroj: <https://cs.wikipedia.org>

- V \mathbb{Z}^2 střední hodnota počtu návratů roste do nekonečna, ale v \mathbb{Z}^3 už ne.



„A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever.“

Shizuo Kakutani

„A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever.“

Shizuo Kakutani

Děkuji za pozornost.