Diskrétní matematika – příklady na 9. cvičení*

28. listopadu 2014

1 Úvod do grafů

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například *úplný graf* na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$, cyklus $C_n = (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$, cesta $P_n = (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\})$ či *úplný bipartitní graf* $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\} \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$.

Graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. *Stupeň vrcholu* v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v, značíme jej $deg_G(v)$. Graf G je *souvislý*, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v. Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce $f\colon V \to V'$ taková, že platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Jako *doplněk grafu* G značíme graf $\overline{G}$, který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá.

Jako *Hamiltonovskou kružnici* v grafu G nazveme kružnici v G, která prochází všemi vrcholy G. Podobně *Hamiltonovská cesta* v G je cesta obsahující všechny vrcholy grafu G. Graf, který má všechny vrcholy stupně rovné $k \in \mathbb{N}_0$, se nazývá *k-regulární*.

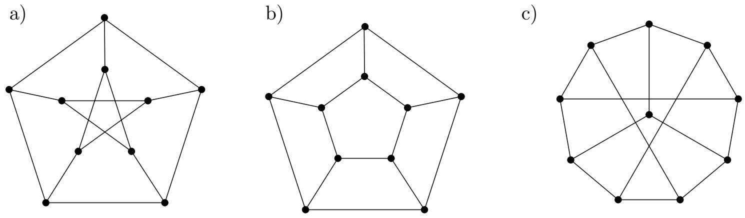
Tah v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost $(v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$, kde v_i jsou vrcholy a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ hrany G, přičemž každou ranou projdeme nanejvýš jednou. Je *uzavřený*, pokud $v_n = v_0$. Uzavřený tah v G je *Eulerovský*, jestliže projde každou hranou právě jednou a každým vrcholem alespoň jednou.

Příklad 1. *Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy by měly všechny stupně různé?*

Příklad 2. *Najděte všechny neizomorfní grafy na 4 vrcholech.*

Příklad 3. *Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?*

Příklad 4. *Které z následujících grafů jsou izomorfní?*



Příklad 5. *Nechť máme* $m, n, k \in \mathbb{N}$.

(a) Spočítejte počet cyklů délky k *v grafu* K_n.

(b) Spočítejte počet cyklů délky k *v grafu* $K_{m,n}$.

Příklad 6. *Pro každou dvojici přirozených čísel* n, k, *která splňuje podmínky* $n \geq k+1$ *a* $2 \mid kn$, *sestrojte* k*-regulární graf na* n *vrcholech.*

Příklad 7. *Charakterizujte grafy s Eulerovským tahem, který nemusí být nutně uzavřený.*

Příklad 8. *Pro která* n *lze úplný graf* K_n *rozložit na hranově disjunktní*

(a) hamiltonovské kružnice?

(b) hamiltonovské cesty?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/