Diskrétní matematika – příklady na 8. cvičení*

21. listopadu 2014

1 Dirichletův princip, kombinatorické počítání a PIE

Počet možných uspořádání n-prvkové množiny je $n!$. Počet způsobů, kolika můžeme vybrat neuspořádanou k-tici z n-prvkové množiny, je $\binom{n}{k}$. Platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ a $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Dirichletův princip. *Máme přirozená čísla $n_1, \ldots, n_k$ a rozdělení $X_1, \ldots, X_k$ množiny X, která má velikost alespoň $1 + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$. Potom existuje i takové, že platí $|X_i| \geq n_i$.*

Princip inkluze a exkluze. *Pro každý soubor konečných množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Příklad 1. *Dirichletův princip.*

(a) Dokažte, že postavíme-li v posluchárně 12 židlí vedle sebe do řady a posadíme-li na ně 9 lidí (každý člověk sedí na právě jedné židli), tak vždy najdeme trojici po sobě jdoucích obsazených židlí.

(b) Ve studijním plánu si každý student může vybrat z celkem 7 předmětů. K úspěšnému dokončení semestru musí každý student splnit právě tři předměty. Ukažte, že dokončilo-li úspěšně semestr 200 studentů, pak aspoň šest z nich splnilo stejnou trojici předmětů.

(c) Předpokládejme, že v každé skupině devíti lidí mají tři lidé stejnou výšku. Ukažte, že mezi 25 lidmi potom najdeme 7 lidí se stejnou výškou.

Příklad 2. *Kombinatorické počítání.*

(a) Pro přirozené číslo n dokažte algebraicky i kombinatoricky následující identitu:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

(b) Pro nezáporná celá čísla a, b, c, n dokažte následující identitu:

$$\sum_{i,j,k \geq 0, i+j+k=n} \binom{a}{i} \cdot \binom{b}{j} \cdot \binom{c}{k} = \binom{a+b+c}{n}.$$

Příklad 3. *Princip inkluze a exkluze.*

(a) Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? Členy stejné národnosti mezi sebou rozlišujeme.

(b) (*) Pro přirozená čísla a, b dokažte identitu

$$a!b! = \sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} (-1)^i \frac{(a+b+1)!}{a+i+1}$$

pomocí následující kombinatorické interpretace: máme a červených míčků očíslovaných čísly $1, \ldots, a$, dále b modrých míčků očíslovaných čísly $1, \ldots, b$ a jeden černý míček. Jaký je počet seřazení míčků, ve kterých jsou nejdřív všechny červené míčky, pak jeden černý a pak všechny modré?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/