Diskrétní matematika – příklady na 5. cvičení*

31. října 2014

1 Částečná uspořádání

Relace R se nazývá *(částečné) uspořádání*, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Uspořádání R je *lineární*, pokud pro každé x, y platí $(x, y) \in R$ nebo $(y, x) \in R$.

Nechť $(X, \preceq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ nazýváme *minimálním prvkem* $(X, \preceq)$, pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x \prec a$. *Maximální prvek* a je definován podobně (neexistuje žádné $x \succ a$).

Nechť $(X, \preceq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ nazýváme *nejmenším prvkem* $(X, \preceq)$, jestliže pro každé $x \in X$ platí $a \preceq x$. Podobně definujeme *největší prvek* ($x \preceq a$ pro každé $x \in X$).

Příklad 1. *(a) Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.*

(b) Uvažme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \preceq)$, kde $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$ (tj. y dělí x). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?

2 Kombinatorické počítání a Dirichletův princip

Počet možných uspořádání n-prvkové množiny je $n!$. Počet způsobů, kolika můžeme vybrat neuspořádanou k-tici z n-prvkové množiny, je $\binom{n}{k}$. Platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ a $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Dirichletův princip. *Máme přirozená čísla $n_1, \ldots, n_k$ a rozdělení $X_1, \ldots, X_k$ množiny X, která má velikost alespoň $1 + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$. Potom existuje i takové, že platí $|X_i| \geq n_i$.*

Příklad 2. *Z kolika hesel máme na výběr, pokud každé heslo může obsahovat pouze písmena z anglické abecedy a musí mít délku 8? Co když navíc může obsahovat jen právě jednu samohlásku?*

Příklad 3. *(a) Kolika způsoby můžeme rozdat n korun mezi k lidí tak, aby každý dostal alespoň jednu korunu?*

(b) Jak se počet změní v případě, že netrváme na tom, aby každý něco dostal?

Příklad 4. *Dokažte, že postavíme-li v posluchárně 12 židlí vedle sebe do řady a posadíme-li na ně 9 lidí (každý člověk sedí na právě jedné židli), tak vždy najdeme trojici po sobě jdoucích obsazených židlí.*

Příklad 5. *Dokažte následující identitu:*

$$\sum_{i=d}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{n-d}.$$

Příklad 6. *Jaký je počet slov délky n nad abecedou $\{A, B\}$, ve kterých se nevyskytují dvě po sobě jdoucí písmena B?*

Příklad 7 (*). *Jaký je počet neklesajících zobrazení $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$?*

Příklad 8 (*). *Kolik existuje k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/