Diskrétní matematika – příklady na 4. cvičení*

24. října 2014

Příklad 1. *Nechť $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ je relace mezi dvojicemi přirozených čísel definována následovně:*

$$R = \{((a,b),(c,d)) \mid a + b \leq c - d\}.$$

Rozhodněte, zda je R reflexivní, symterická, tranzitivní či asymetrická.

1 Funkce

Zobrazení (respektive *funkce*) $f\colon X \to Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x. Funkce $f\colon X \to Y$ je

(a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x, x' \in X$, $x \neq x'$;

(b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;

(c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

Jsou-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h\colon X \to Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je definované jinak než u relací!

Příklad 2. *Najděte příklad*

(a) prosté funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která není na,

(b) funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je na, ale není prostá.

Příklad 3. *Jaký je počet všech zobrazení $f\colon \{1,2,\ldots,m\} \to \{1,2,\ldots,n\}$? Co počet bijektivních zobrazení $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$? A co prostá zobrazení $f\colon \{1,2,\ldots,m\} \to \{1,2,\ldots,n\}$?*

Příklad 4. *Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ jsou zobrazení. Nechť $g \circ f$ je prosté.*

(a) Rozhodněte, zda f musí být prosté.

(b) Rozhodněte, zda g musí být prosté.

Příklad 5. *Ukažte, že je-li X konečná množina, potom funkce $f\colon X \to X$ je prostá právě tehdy, když je na.*

2 Částečná uspořádání

Relace R se nazývá *(částečné) uspořádání*, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Uspořádání R je *lineární*, pokud pro každé x, y platí $(x,y) \in R$ nebo $(y,x) \in R$.

Máme-li nějaké uspořádání $\preceq$, tak můžeme definovat odvozenou relaci *ostré nerovnosti* $\prec$ takto: $a \prec b$ právě tehdy, když $a \preceq b$ a $a \neq b$. Také lze definovat *obrácenou nerovnost*, tedy relaci $\succeq$, vztahem $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$.

Hasseův diagram je znázornění částečně uspořádané množiny $(X, \leq)$, kde každý prvek množiny X tvoří bod (vrchol). Dva vrcholy se spojí čarou (hranou) vedenou zdola nahoru od x k y, jestliže $x < y$ a neexistuje takové z, že $x < z < y$.

Nechť $(X, \preceq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ nazýváme *minimálním prvkem* $(X, \preceq)$, pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x \prec a$. *Maximální prvek* a je definován podobně (neexistuje žádné $x \succ a$).

Nechť $(X, \preceq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ nazýváme *nejmenším prvkem* $(X, \preceq)$, jestliže pro každé $x \in X$ platí $a \preceq x$. Podobně definujeme *největší prvek* ($x \preceq a$ pro každé $x \in X$).

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 6. *Uvažme relaci $\preceq$ na množině $\mathbb{R}^3$ definovanou předpisem*

$$(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow a_1 \geq a_2,\ b_1 \geq b_2,\ c_1 \leq c_2.$$

Jedná se o částečné uspořádání?

Příklad 7. *Popište všechny relace na množině X, které jsou zároveň ekvivalencí a zároveň částečným uspořádáním.*

Příklad 8. *(a) Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.*

(b) Uvažme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \preceq)$, kde $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$ (tj. y dělí x). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?

Příklad 9. *Nechť $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Říkáme, že jsou* isomorfní*, pokud existuje bijekce $f\colon X \to Y$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí $x \leq y$ právě tehdy, když $f(x) \preceq f(y)$.*

(a) Nakreslete všechny navzájem neisomorfní tříprvkové částečně uspořádané množiny.

(b) Dokažte, že každé dvě n-prvkové lineárně uspořádané množiny jsou navzájem isomorfní.

(c) Najděte dvě navzájem neisomorfní lineární uspořádání množiny $\mathbb{N}$.