Diskrétní matematika – příklady na 3. cvičení*

17. října 2014

1 Relace

(Binární) relace R je množina uspořádaných párů. Neboli $R \subseteq X \times Y$, kde X a Y jsou nějaké množiny. Je-li $X = Y$, tak mluvíme o *relaci na* X. Fakt, že prvky $x \in X$ a $y \in Y$ jsou v relaci R, zapisujeme $(x, y) \in R$ nebo xRy. Jsou-li X, Y, Z množiny a $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ jsou relace, pak *složení relací* $R \circ S$ značí relaci $T \subseteq X \times Z$, kde pro $x \in X$ a $z \in Z$ platí xTz právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a ySz. *Inverzní relací* R^{-1} k relaci $R \subseteq X \times Y$ rozumíme $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$. Relace $R \subseteq X \times X$ je

(a) *reflexivní*, pokud xRx pro každé $x \in X$;

(b) *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx pro každé $x, y \in X$;

(c) *(slabě) antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$ pro každé $x, y \in X$;

(d) *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz pro každé $x, y, z \in X$;

(e) *asymetrická*, pokud xRy implikuje $\neg(yRx)$ pro každé $x, y, z \in X$.

Jako *ekvivalenci* označujeme relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 1. *Kolik je na n-prvkové množině X relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik obojí?*

Příklad 2. *Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X. Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:*

(a) $R \cap S$

(b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \circ S$

Příklad 3. *(a) Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině?*

(b) (*) Napadne vás vzoreček pro počet ekvivalencí na n-prvkové množině?

Příklad 4. *Najděte příklad dvojice relací (R, S) na X takové, že R i S jsou tranzitivní, ale $R \cup S$, $R \setminus S$ ani $R \Delta S$ tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl $R \Delta S$ vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R a S, formálně $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$.*

Příklad 5. *Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.*

2 Funkce

Zobrazení (respektive *funkce*) $f\colon X \to Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x. Funkce $f\colon X \to Y$ je

(a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x \neq x'$, $x, x' \in X$;

(b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;

(c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Jsou-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h\colon X \to Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je definované jinak než u relací!

Příklad 6. *Ukažte, že je-li X konečná množina, potom funkce $f\colon X \to X$ je prostá právě tehdy, když je na.*

Příklad 7. *Najděte příklad*

(a) prosté funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která není na,

(b) funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je na, ale není prostá.

Příklad 8. *Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ jsou zobrazení. Nechť $g \circ f$ je prosté.*

(a) Rozhodněte, zda f musí být prosté.

(b) Rozhodněte, zda g musí být prosté.