

Diskrétní matematika – příklady na 2. cvičení*

4. října 2014

1 Matematická indukce

Příklad 1. Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé $n \in \mathbb{N}$

(a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$.

Příklad 2. Mějme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, na které chybí jedno rohové políčko. Ukažte, že je možné ji celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:



Příklad 3. Uvažme Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, což je posloupnost splňující rekurentní podmínky $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Ukažte, že platí $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$.

Příklad 4. Dokažte indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n^5 - n)$ dělitelné pěti.

Příklad 5. Dokažte indukcí Moivreovu větu, která říká, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Příklad 6. Mějme n přímek v obecné poloze v rovině (tj. žádné tři se neprotínají v jednom bodě a žádné dvě nejsou rovnoběžné). Ukažte, že rovina je těmito přímkami rozdělena na $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ částí.

Příklad 7. Najděte chybu ve zmíněném důkazu tvrzení: Nechť p_1, \dots, p_n je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.

Důkaz. Postupujeme indukcí. Pro $n = 2$ tvrzení platí. Nechť platí pro n a mějme $n + 1$ přímek p_1, \dots, p_{n+1} . Z indukčního předpokladu mají přímky p_1, p_2, \dots, p_n společný bod x . Podobně přímky $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_{n+1}$ mají společný bod y . Přímka p_1 leží v obou skupinách, proto obsahuje jak x , tak y . Totéž platí pro p_{n-1} . Poněvadž p_1 a p_{n-1} jsou různoběžné a protínají se tedy jen v jednom bodě, platí $x = y$. Takže všechny přímky p_1, \dots, p_{n+1} mají společný bod. \square

Příklad 8 (*). Indukcí dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Neboli, že pro každých n kladných reálných čísel a_1, a_2, \dots, a_n platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Příklad 9 (*). Na ostrově žije 1000 domorodců, z nichž 900 má hnědé a 100 modré oči. Každý domorodec vidí barvu očí všech ostatních, ale nezná tu svoji. Jejich náboženství jim zakazuje se o barvě očí bavit a dozví-li se nějaký domorodec, že má modré oči, pak se musí následující den zabít. Jednoho dne kmen navštívil cestovatel neznalý místních zvyklostí, který při svém odjezdu neopatrně prohlásil: „To jsem rád, že vidím osobu s modrýma očima.“. Jaký vliv bude mít tato poznámka na domorodce?

(a) Nestane se nic, protože cestovatel nepřinesl žádnou novou informaci. Každý člověk z kmene již před jeho návštěvou věděl, že někteří z místních mají modré oči.

(b) Po 100 dnech všichni modroocí domorodci spáchají sebevraždu. To proto, že daná situace je speciální případ následující věty, která se dá dokázat matematickou indukcí.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Věta. *Nechť v kmeni žije $n \in \mathbb{N}$ domorodců s modrýma očima. Potom po n dnech od cestovatelova odjezdu všech n domorodců s modrýma očima spáchá sebevraždu.*

Důkaz. Postupujeme indukcí podle n . Pro $n = 1$ si osamocený modrooký domorodec uvědomí, že cestovatel mluvil o něm a zabije se další den. Nyní uvažme $n > 1$. Každý modrooký domorodec bude uvažovat následovně: „Pokud nemám modré oči, pak je na ostrově jen $n - 1$ osob s modrýma očima a ti podle indukce spáchají sebevraždu po $n - 1$ dnech od cestovatelova odjezdu.“ Ale po $n - 1$ dnech nikdo sebevraždu nespáchá, protože nikdo z nich do té doby nemá jak zjistit, že je sám modrooký. Pod $n - 1$ dnech si tak každý z modrookých domorodců uvědomí, že sám musí mít modré oči a n -tý den spáchá sebevraždu. \square