Diskrétní matematika – příklady na 13. cvičení*

9. ledna 2015

1 Prostor cyklů

Pro graf $G = (V, E)$ s n vrcholy a m hranami nazveme podmnožinu hran $E' \subseteq E$ *sudou*, pokud má graf (V, E') všechny stupně sudé. Označme jako $\mathcal{E}$ množinu charakteristických vektorů sudých množin v G. Připomeňme, že *symetrickou diferencí* Δ je myšlena operace $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dá se ukázat, že $(\mathcal{E}, \Delta)$ tvoří vektorový prostor dimenze $m - n + k$ nad dvouprvkovým tělesem $\mathbb{F}_2$, kde k označuje počet komponent souvislosti grafu G. Tento prostor se nazývá *prostor cyklů*.

Příklad 1. *Dokažte, že symetrickou diferencí dvou sudých množin je opět sudá množina.*

Příklad 2. *Jako* les *označuje graf, který neobsahuje cyklus. Je-li $T = (V, E')$ les obsažený v grafu G, pak pro každé $e \in E \setminus E'$ označme jako C_e jednoznačně určený cyklus, který je obsažený v $(V, E' \cup \{e\})$. Ukažte, že charakteristické vektory cyklů C_e, $e \in E'$, tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathcal{E}, \Delta)$.*

2 Spernerova věta

Nechť X je n-prvková množina a nechť $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Potom o $\mathcal{M}$ řekneme, že je *nezávislý*, pokud neobsahuje dvě různé množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $A \subseteq B$.

Spernerova věta (Spernerova věta)**.** *Každý nezávislý systém podmnožin n-prvkové množiny obsahuje nanejvýš $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ množin.*

Příklad 3. *Zkuste najít co největší nezávislý systém podmnožin pětiprvkové množiny.*

Příklad 4. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že jej nedělí čtverec žádného přirozeného čísla většího než jedna. Určete největší možnou velikost množiny D dělitelů n, kde žádný dělitel z D nedělí jiného dělitele z D.*

Příklad 5. *Řekneme, že systém podmnožin $\mathcal{M}$ konečné množiny X je seminezávislý, pokud neobsahuje tři množiny $A, B, C \subseteq X$ takové, že $A \subseteq B \subseteq C$.*

(a) Ukažte, že pro seminezávislý systém $\mathcal{M}$ platí $|\mathcal{M}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

(b) Ukažte, že pro liché n je odhad nejlepší možný.

Příklad 6. *Littlewood-Offord problém. Nechť $a_1, , \ldots, a_n$ jsou reálná čísla s $|a_i| \geq 1$. Nechť $p(a_1, \ldots, a_n)$ označuje počet vektorů $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, kde $\varepsilon_i = \pm 1$, takových, že platí*

$$-1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1.$$

(a) (*) Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n$ platí $p(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

(b) Pro každé sudé n nalezněte $a_1, \ldots, a_n$ s $p(a_1, \ldots, a_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Jaká je situace pro lichá n?

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜balko/