Diskrétní matematika – příklady na 11. cvičení*

12. prosince 2014

1 Rovinné grafy

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají spojité křivky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto křivek se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu* G. Řekneme, že graf H je *podrozdělením* grafu G, pokud H je izomorfní grafu, který z G dostaneme podrozdělováním jeho hran, tj. umísťováním vrcholů na hrany.

Eulerova formule. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn nakreslení grafu G. Potom platí $v + f - e = 2$.*

Věta o čtyřech barvách. *Každý rovinný graf jde obarvit čtyřmi barvami.*

Kuratowského věta. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

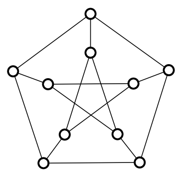
Příklad 1. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení.*

(a) Ukažte, že pro každý rovinný graf s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$. Můžete bez důkazu využít fakt, že maximální rovinné grafy co do počtu hran jsou triangulace, *což jsou rovinné grafy, pro které existuje rovinné nakreslení, v němž je každá stěna trojúhelník.*

(b) Pro jaké největší $d \in \mathbb{N}$ dokážete najít d-regulární rovinný graf? Jak velké d má ještě smysl uvažovat?

Příklad 2. *Nalezněte rovinná nakreslení grafů K_5, K_6 a K_7 na toru.*

Příklad 3. *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



Příklad 4. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Na kolika vrcholech ještě dokážete najít rovinné nakreslení grafu a jeho doplňku?*

Příklad 5. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

2 Stromy

Strom je souvislý graf bez cyklů. Ekvivalentní definice jsou: graf, kde každé dva vrcholy lze spojit jednoznačně určenou cestou; souvislý graf, který přestane být souvislý po odebrání libovolné hrany; graf bez cyklů, kde po přidání libovolné nové hrany už cyklus vznikne; souvislý graf s počtem hran o jedna menším než je počet vrcholů. Nesouvislý graf, jehož každá komponenta souvislosti je stromem, se nazývá *les*. *Kostrou* souvislého grafu G označujeme podgraf grafu G, který obsahuje všechny vrcholy G který je zároveň stromem.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 6. *Kolik je všech stromů s vrcholy* $\{1, 2, 3, 4\}$*? Nakreslete všechny po dvou neizomorfní stromy na 6 vrcholech.*

Příklad 7. *Ukažte, že graf na* n *vrcholech s* k *komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má* $n - k$ *hran.*

Příklad 8. *Nechť* T *je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu* e *mají obě komponenty v* $T - e$ *lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v* T *lichý stupeň.*