Diskrétní matematika – příklady na 10. cvičení*

5. prosince 2014

1 Vlastnosti grafů – barevnost

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu G=(V,E)*, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $b(u) \neq b(v)$. *Barevnost grafu* G, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G. Velikost největší *nezávislé množiny* grafu G, neboli množiny, ve které žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou, značíme $\alpha(G)$.

Jako *chromatický polynom* grafu G označujeme polynom P_G, kde $P_G(k)$ označuje počet obarvení grafu G při použití k barev. Obarvení zde bereme jako různá i když se liší jen pořadím barev. Příklady: pro prázdný graf E_n na n vrcholech máme $P_{E_n}(k) = k^n$, pro úplný graf K_n dostaneme $P_{K_n}(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

Příklad 1. *Zkuste najít graf G jehož barevnost je větší než velikost největšího úplného grafu, který G obsahuje jako podgraf. Pro zajímavost: jak velkou barevnost dokážete vynutit v grafu, který neobsahuje K_3?*

Příklad 2. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Čemu se rovná $\chi(Q_n)$?*

Příklad 3. *Pro každý graf s n vrcholy a m hranami zkuste ukázat následující odhady barevnosti:*

(a) $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

(b) $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

(c) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Příklad 4. *Určete chromatický polynom*

(a) cesty P_n,

(b) (*) cyku C_n.

Příklad 5. *Pro graf G a jeho hranu e označme jako $G-e$ graf, který z G vznikne odebráním e a jako $G \cdot e$ označme graf, který vznikne z G* kontrakcí hrany *e, neboli slepením jejích koncových vrcholů a odstraněním případných smyček a násobných hran. Dokažte, že platí $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\cdot e}(k)$.*

2 Vlastnosti grafů – prostor cyklů

Pro graf $G = (V, E)$ s n vrcholy a m hranami nazveme podmnožinu hran $E' \subseteq E$ *sudou*, pokud má graf (V, E') všechny stupně sudé. Označme jako $\mathcal{E}$ množinu charakteristických vektorů sudých množin v G. Připomeňme, že *symetrickou diferencí* Δ je myšlena operace $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dá se ukázat, že $(\mathcal{E}, \Delta)$ tvoří vektorový prostor dimenze $m - n + k$ nad dvouprvkovým tělesem $\mathbb{F}_2$, kde k označuje počet komponent souvislosti grafu G. Tento prostor se nazývá *prostor cyklů*.

Příklad 6. *Dokažte, že symetrickou diferencí dvou sudých množin je opět sudá množina.*

Příklad 7. *Jako* les *označuje graf, který neobsahuje cyklus. Je-li $T = (V, E')$ les obsažený v grafu G, pak pro každé $e \in E \setminus E'$ označme jako C_e jednoznačně určený cyklus, který je obsažený v $(V, E' \cup \{e\})$. Ukažte, že charakteristické vektory cyklů C_e, $e \in E'$, tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathcal{E}, \Delta)$.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/