Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

21. prosince 2014

1 Zadáno 15. 10. 2013

Příklad 1. *Dokažte, že pokud do čtverce se stranami délky 1 umístíme pět bodů, tak vždy mezi nimi dokážeme najít dva, které jsou v (Eukleidovské) vzdálenosti nanejvýš* $\sqrt{2}/2$. *Je možné nahradit* $\sqrt{2}/2$ *menším číslem?* **[2]**

Příklad 2. *Existují dvě iracionální čísla* x, y *taková, že* $x^y \in \mathbb{Q}$? *Můžete využít fakt, že* $\sqrt{2}$ *není racionální.* **[3]**

Příklad 3. *Označme jako* S_n *množinu čísel, která lze zapsat ve tvaru* $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$, *kde každé* $\pm$ *nahradíme buď symbolem* $+$ *nebo* $-$. *Dokažte, že čísla v* S_n *jsou právě ta* $x \in \mathbb{Z}$, *pro která platí* $\frac{-n(n+1)}{2} \leq x \leq \frac{n(n+1)}{2}$ *a která mají všechna stejnou paritu. Jak tato parita souvisí s* n? **[5]**

Příklad 4. *Dokažte, že pomocí dvoukorun a pětikorun dokážeme vyplatit libovolnou částku* N *korun, kde platí* $N \geq 4$. **[2]**

Příklad 5. *Rozhodněte, pro která přirozená* n *jde šachovnice* $n \times n$ *vydláždit dlaždicemi tvaru „L“ pokrývajícími tři políčka. Jsou povolena všechna čtyři otočení.* **[3]**

2 Zadáno 29. 10. 2014

Příklad 6. *Najděte příklad dvojice relací* (R, S) *na* X *takové, že* R *i* S *jsou tranzitivní, ale* $R \cup S$, $R \setminus S$ *ani* $R \Delta S$ *tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl* $R \Delta S$ *vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin* R *a* S, *formálně* $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$. **[3]**

Příklad 7. *Dokažte, že platí* $R \circ R^{-1} = \Delta_X$, *je-li relace* $R \circ R^{-1}$ *reflexivní a slabě antisymetrická. Symbolem* Δ_X *značíme nejmenší reflexivní relaci na množině* X: **[3]**

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Příklad 8. *Zkuste odvodit vzoreček pro počet ekvivalencí na* n*-prvkové množině.* **[5]**

Příklad 9. *Dokažte, že uspořádaná množina* $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ *má nekonečně mnoho minimálních prvků. O která čísla se jedná? Nakreslete příslušný Hasseův diagram na prvcích* $1, 2, \ldots, 15$. **[2]**

Příklad 10. *Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.* **[2]**

Příklad 11. *Nalezněte posloupnost 16 přirozených čísel, která neobsahuje monotónní podposloupnost délky 5. Dokažte, že nalezená posloupnost skutečně funguje.* **[3]**

3 Zadáno 15. 11. 2014

Příklad 12. *Nechť* $\check{s}(n)$ *značí počet permutací bez pevného bodu na* n*-prvkové množině. Dokažte vztah* **[2]**

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Příklad 13. *(a) Kolik celočíselných řešení má následující systém rovnic?* **[2]**

$$x + y + z = 25, \quad 4 \leq x \leq 8, \quad 2 \leq y \leq 11, \quad 1 \leq z \leq 10$$

(b) Kolik celočíselných řešení má tato rovnice? **[4]**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20, \quad 1 \leq x_1, \ldots, x_6 \leq 4$$

Nápověda: Princip inkluze a exkluze.

Příklad 14. *Dokažte, že pro Eulerovu funkci $\varphi(n)$ a nesoudělná čísla $m, n \in \mathbb{N}$ platí* **[3]**

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m)\,\varphi(n)\,.$$

Neboli ukažte, že Eulerova funkce je pro daná m a n multiplikativní.

Příklad 15. *Dokažte následující identitu:* **[3]**

$$\sum_{i=d}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{n-d}.$$

Příklad 16. *Jaký je počet slov délky n nad abecedou $\{A, B\}$, ve kterých se nevyskytují dvě po sobě jdoucí písmena B?* **[2]**

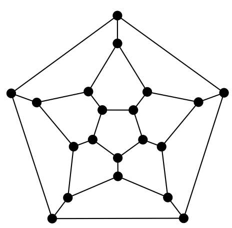
4 Zadáno 3. 12. 2014

Příklad 17. *Nalezněte chybu v následujícím důkazu tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3.“* **[3]**

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech, pro který tvrzení platí. Vytvoříme z něj nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. □

Příklad 18. *Ukažte, že každý souvislý graf G s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dva různé vrcholy u, v, takové, že $G - u$ i $G - v$ jsou souvislé.* **[3]**

Příklad 19. *Hledání Hamiltonovských kružnic a cest. Nalezněte Hamiltonovskou kružnici pro pravidelný dvanáctistěn.* **[2]**



Příklad 20. *V orientovaném grafu hranám odpovídají uspořádané dvojice vrcholů (šipky mezi vrcholy), přičemž každý pár vrcholů tvoří nanejvýš jednu takovou dvojici. Ukažte, že každý orientovaný úplný graf obsahuje orientovanou Hamiltonovskou cestu (cestu obsahující všechny vrcholy tvořenou na sebe navazujícími šipkami stejného směru).* **[2]**

Příklad 21. *Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2 \mid kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech.* **[3]**

Příklad 22. Tah *v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost $(v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$, kde v_i jsou vrcholy a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ hrany G, přičemž každou ranou projdeme nanejvýš jednou. Je* uzavřený, *pokud $v_n = v_0$. Uzavřený tah v G je* Eulerovský, *jestliže projde každou hranou právě jednou a každým vrcholem alespoň jednou.*

Charakterizujte grafy s Eulerovským tahem, který nemusí být nutně uzavřený. **[2]**

5 Zadáno 21. 12. 2014

Příklad 23. *Nechť máme $m, n, k \in \mathbb{N}$. Spočítejte počet cyklů délky k v grafu $K_{m,n}$.* **[2]**

Příklad 24. *Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů?* **[2]**

Příklad 25. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$. Kostrou grafu G rozumíme strom, který obsahuje všechny vrcholy grafu G a je jeho podgrafem.* **[3]**

Příklad 26. *Ukažte, že každý graf G obsahuje vrchol u a množinu aspoň $\lfloor \frac{1}{2} \deg_G(u) \rfloor$ cyklů takových, že každé dva sdílejí pouze vrchol u a žádný jiný.* **[2]**

Příklad 27. *Nechť G je souvislý rovinný graf s v vrcholy, který splňuje následující podmínky:*

- *$v = 8k$ pro nějaké přirozené číslo k,*
- *$\frac{5v}{8}$ vrcholů má stupeň tři, $\frac{v}{4}$ vrcholů má stupeň čtyři a $\frac{v}{8}$ vrcholů má stupeň pět,*
- *všechny stěny v rovinném nakreslení G jsou buď trojúhelníky nebo čtyřúhelníky.*

Nakreslete rovinné nakreslení aspoň jednoho takového grafu. Kolik vrcholů, hran, trojúhelníkových a čtyřúhelníkových stěn takový graf může mít? **[3]**

Příklad 28. *Ukažte, že v každé triangulaci G (tj. v grafu, který má rovinné nakreslení, v němž je každá stěna trojúhelník) existuje hrana $\{u, w\}$, pro kterou platí $\deg_G(u) + \deg_G(w) \leq 22$.* **[4]**