

Diskrétní matematika – příklady na 9. cvičení*

28. listopadu 2013

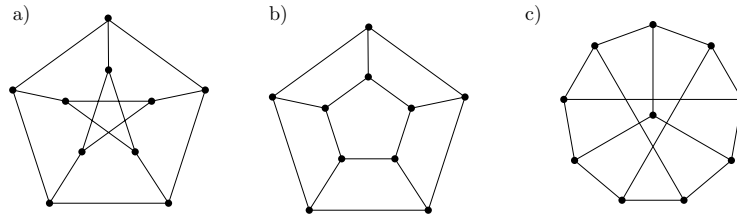
1 Grafy - úvod

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například úplný graf na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$, cyklus $C_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$, cesta $P_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \dots, n-1\})$ či úplný bipartitní graf $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$.

Graf H je podgrafem grafu G , pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Stupeň vrcholu v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v , značíme jej $\deg_G(v)$. Graf G je souvislý, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v . Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou isomorfní, pokud existuje bijekce $f: V \rightarrow V'$ taková, že platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Jako doplněk grafu G značíme graf \overline{G} , který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá.

Příklad 1. Najděte všechny neisomorfní grafy na 4 vrcholech.

Příklad 2. Které z následujících grafů jsou isomorfní?



Příklad 3. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy by měly všechny různé stupně?

Příklad 4. Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplněkem nesouvislý?

Příklad 5. Pro která $n \in \mathbb{N}$ je cyklus C_n isomorfní se svým doplněkem?

Příklad 6. Jak vypadají grafy, které nemají cestu na 4 vrcholech jako podgraf?

Příklad 7. Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň d , obsahuje cestu na $d+1$ vrcholech jako podgraf.

Příklad 8 (*). Pokuste se zkonstruovat co nejvíc po dvou neisomorfních grafů s množinou vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$ (předpokládejte, že n je nějaké hodně velké číslo). Umíte jich najít víc než n^2 ? Co alespoň $2^{n/10}$, nebo dokonce ještě víc?

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>