

Diskrétní matematika – příklady na 7. cvičení*

9. listopadu 2013

1 Zbytky z relací a částečných uspořádání

Příklad 1. *Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině?*

Příklad 2. *Uvažme uspořádanou množinu (\mathbb{N}, \preceq) , kde $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$ (tj. y dělí x). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?*

Příklad 3. *Nechť (X, \preceq) , (Y, \preceq) jsou uspořádané množiny. Říkáme, že jsou isomorfní, pokud existuje bijekce $f: X \rightarrow Y$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ právě tehdy, když $f(x) \preceq f(y)$.*

- (a) *Nakreslete všechny navzájem neisomorfní tříprvkové částečně uspořádané množiny.*
- (b) *Dokažte, že každé dvě n -prvkové lineárně uspořádané množiny jsou navzájem isomorfní.*
- (c) (*) *Najděte dvě navzájem neisomorfní lineární uspořádání množiny \mathbb{N} .*

Příklad 4. *Popište všechny relace na množině X , které jsou zároveň ekvivalencí a zároveň částečným uspořádáním.*

2 Spernerova věta

Nechť X je n -prvková množina a nechť \mathcal{M} je systém jejích podmnožin. Potom o \mathcal{M} řekneme, že je *nezávislý*, pokud neobsahuje dvě různé množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $A \subseteq B$.

Věta (Spernerova věta). *Každý nezávislý systém podmnožin n -prvkové množiny obsahuje nanejvýš $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ množin.*

Příklad 5. *Zkuste najít co největší nezávislý systém podmnožin pětiprvkové množiny.*

Příklad 6. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že jej nedělí čtverec žádného přirozeného čísla většího než jedna. Určete největší možnou velikost množiny D dělitelů n , kde žádný dělitel z D nedělí jiného dělitele z D .*

Příklad 7. *Řekneme, že systém podmnožin \mathcal{M} konečné množiny X je seminezávislý, pokud neobsahuje tři množiny $A, B, C \subseteq X$ takové, že $A \subseteq B \subseteq C$.*

- (a) *Ukažte, že pro seminezávislý systém \mathcal{M} platí $|\mathcal{M}| \leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.*
- (b) *Ukažte, že pro liché n je odhad nejlepší možný.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>