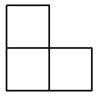
Diskrétní matematika – příklady na 2. cvičení[*]

8. října 2013

1 Matematická indukce

Příklad 1. *Mějme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, na které chybí jedno rohové políčko. Ukažte, že je možné ji celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:*



Příklad 2. *Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé $n \in \mathbb{N}$*

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$.

Příklad 3. *Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte, že platí*

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

(Pozor! Při postupu matematickou indukcí podle n při pevném r nestačí jako začátek indukce zvolit $n = r = 1$.)

Příklad 4. *Dokažte indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n^5 - n)$ dělitelné pěti.*

Příklad 5. *Dokažte indukcí Moivreovu větu, která říká, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Příklad 6. *Uvažme Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, což je posloupnost splňující rekurentní podmínky $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Ukažte, že platí $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.*

Příklad 7 (*)**.** *Dokažte, že každé $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru $n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j}$, kde platí $i_1 \geq 2$ a pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ je $i_{j+1} \geq i_j + 2$.*

Příklad 8. *Mějme n přímek v obecné poloze v rovině (tj. žádné tři se neprotínají v jednom bodě a žádné dvě nejsou rovnoběžné). Ukažte, že rovina je těmito přímkami rozdělena na $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ částí.*

Příklad 9. *Dokažte, že oblasti v rovinné mapě, která je tvořena n kružnicemi, z nichž každá protíná všechny ostatní, lze obarvit dvěma barvami tak, že spolu nesousedí žádné dvě oblasti stejné barvy.*

Příklad 10 (*)**.** *Indukcí dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Neboli, že pro každých n kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Příklad 11. *Najděte chybu ve zmíněném důkazu tvrzení: Nechť $p_1, \ldots, p_n$ je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.*

Důkaz. Postupujeme indukcí. Pro $n = 2$ tvrzení platí. Nechť platí pro n a mějme $n + 1$ přímek $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Z indukčního předpokladu mají přímky $p_1, p_2, \ldots p_n$ společný bod x. Podobně přímky $p_1, p_2 \ldots, p_{n-1}, p_{n+1}$ mají společný bod y. Přímka p_1 leží v obou skupinách, proto obsahuje jak x, tak y. Totéž platí pro p_{n-1}. Poněvadž p_1 a p_{n-1} jsou různoběžné a protínají se tedy jen v jednom bodě, platí $x = y$. Takže všechny přímky $p_1, \ldots, p_{n+1}$ mají společný bod. □

[*]Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/