

Algoritmická teorie her — 2. domácí úkol¹

Nashova ekvilibria

zadáno 4.11.2021, termín odevzdání 18.11.2021

Pokud chcete vidět své body na stránkách cvičení, tak si, prosím, zvolte přezdívku a napište ji spolu se svým jménem na svoje řešení či mi ji pošlete e-mailem.

Příklad 1. Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.

(a) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, [2]

	Program P	Program D
Proměnné	y_1, \dots, y_n	x_0
Účelová funkce	$\min x^\top M y$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1} x_0 \leq M^\top x.$

(b) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, [2]

	Program P'	Program D'
Proměnné	y_0, y_1, \dots, y_n	x_0, x_1, \dots, x_m
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1} y_0 - M y \geq \mathbf{0},$ $\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1} x_0 - M^\top x \leq \mathbf{0},$ $\sum_{i=1}^m x_i = 1,$ $x_1, \dots, x_m \geq 0.$

Můžete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

Příklad 2. Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashovo ekvilíbrium následující hry dvou hráčů: [2]

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3. \end{pmatrix}$$

Výpočet začněte výběrem značky 1.

Příklad 3. [Spernerovo lemma] Nechť S je podrozdělení trojúhelníku T v rovině. Korektní obarvení vrcholů S přiřazuje jednu ze tří barev (modrá, červená a zelená) každému vrcholu z S tak, že všechny tři barvy jsou použité na vrcholech z T . Navíc každý vrchol z S ležící na hraně z T musí mít jednu z barev, kterou má nějaký vrchol této hrany ležící v T .

Dokažte, že v každém korektním obarvení S existuje trojúhelníková stěna v S jejíž vrcholy jsou obarveny všemi třemi barvami.

Hint: Použijte redukcí na problém END-OF-THE-LINE. [3]

¹Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>