Algoritmická teorie her – příklady na 6. cvičení*

5. ledna 2022

1 Bulowova–Klempererova věta a více-parametrický mechanism design

Věta 1 (The Bulow–Klemperer Theorem)**.** *Nechť jsou $F = F_1 = \cdots = F_n$ regulární rozdělení pravděpodobnosti a buď n přirozené číslo. Potom platí následující nerovnost*

$$\mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[\mathrm{Rev}(VA_{n+1})\right] \geq \mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_n\sim F}\left[\mathrm{Rev}(OPT_{F,n})\right], \tag{1}$$

kde $\mathrm{Rev}(VA_{n+1})$ *označuje zisk Vickreyho aukce* VA_{n+1} *s* $n+1$ *kupujícími (a žádnou rezervou) a* $\mathrm{Rev}(OPT_{F,n})$ *značí zisk optimální aukce* $OPT_{F,n}$ *při* F *s* n *kupujícími.*

Více-parametrický mechanism design označuje následující nastavení:

(a) n racionnálních účastníků (neboli kupujících),

(b) konečná množina Ω výstupů,

(c) každý kupující i má soukromé ohodnocení $v_i(\omega) \geq 0$ pro každý výstup $\omega \in \Omega$.

Každý kupující i odešle svou nabídku $b_i(\omega)$ pro každé $\omega \in \Omega$ a a nším cílem je navrhnout mechanismus, který zvolí výstup $\omega \in \Omega$ maximalizující *sociální přebytek* $\sum_{i=1}^{n} v_i(\omega)$.

Věta 2 (Vickrey–Clarke–Groves (VCG) mechanismus)**.** *V každém více-parametrickém mechanismu existuje DSIC mechanismus maximalizující sociální přebytek.*

Příklad 1. *Dokažte, že platební pravidlo z důkazu VCG mechanismu je vždy nezáporné a shora omezené hodnotou* $b_i(\omega^*)$*. Neboli ukažte, že* $0 \leq p_i(b) \leq b_i(\omega^*)$ *pro každý vektor* b *nabídek, kde*

$$p_i(b) = \max_{\omega\in\Omega}\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_j(\omega)\right\} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_j(\omega^*)$$

a

$$\omega^* = \mathrm{argmax}_{\omega\in\Omega}\sum_{i=1}^{n} b_i(\omega).$$

Příklad 2. *Uvažte 3-položkovou aukci se dvěma kupujícími* 1 *and* 2*. Tři položky* A*,* B *a* C *jsou draženy najednou a každý kupující může dát nabídku na libovolnou podmnožinu položek. Ohodnocení kupujících pro jednotlivé podmnožiny položek jsou uvedeny v Tabulce 1. Jaký je výstup VCG aukce?*

bidder i	$v_i(\emptyset)$	$v_i(A)$	$v_i(B)$	$v_i(C)$	$v_i(AB)$	$v_i(AC)$	$v_i(BC)$	$v_i(ABC)$
$i=1$	0	24	4	9	29	38	20	50
$i=2$	0	15	18	11	30	34	32	47

Tabulka 1: Ohodnocení kupujících z Příkladu 2.

Neboli kteří kupující získají které položky a kolik každý zaplatí?

Příklad 3. *Uvažte 1-položkovou aukci s* $n \geq 2$ *kupujícími, kteří svá ohodnocení volí podle regulárního rozdělení pravděpodobnosti* F*. Dokažte, že střední hodnota zisku Vickreyho aukce bez rezervy je aspoň* $\frac{n-1}{n}$*-zlomek střední hodnoty zisku optimální aukce se stejným počtem* n *kupujících.*

Nápověda: použijte Bulowovu–Klempererovu větu. Když přidáme jednoho kupujícího, o kolik může maximální střední hodnota zisku vzrůst?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/