Bonusová série č. 1

Termín odevzdání 30.11.2016 14:00

Jméno: ____________________

Každé svoje tvrzení odůvodněte. Konstatování bez odůvodnění nebude počítáno jako odpověď.

1. (3b) Pro relaci R na množině X definujeme indukcí symbol R^n: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R \circ R^n$.

   a) Ukažte, že je-li X konečná množina a R relace na ní, potom existují $r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$ taková, že $R^r = R^s$.

   b) Najděte relaci R na konečné množině takovou, že $R^n \neq R^{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

   c) Ukažte, že je-li X nekonečná, tvrzení (a) platit nemusí (tj. Existuje relace R taková, že všechny relace tvaru R^n jsou navzájem různé).

2. (4b) Mějme funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$.

a) Funkce $g \circ f$ je *na*. Dokažte, nebo vyvraťte, že i) funkce g musí být *na*, ii) funkce f musí být *na*.

b) Funkce $g \circ f$ je *prostá*. Dokažte, nebo vyvraťte, že i) funkce g musí být *prostá*, ii) funkce f musí být *prostá*.

c) Dokažte, že funkce f je bijekce, právě tehdy když existuje funkce g taková, že $f \circ g = i_Y$ a $g \circ f = i_X$. Označení $i_X : X \to X$ je funkce, která zobrazuje každý prvek množiny X na něj samotný (tato funkce se nazývá *identická* nebo *identita* na X).

(Při důkazu c) nezapomeňte, že dokazovaná věta je ekvivalence.)

3. (1b) Dokažte, že uspořádání $(N \setminus \{1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. (Pro přirozená čísla a, b symbol $a|b$ znamená „a dělí b“, neboli že existuje přirozené číslo c takové, že $b = ac$.)

4. (2b) Buď $(X, \preccurlyeq)$ uspořádaná množina, $A \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $s \in X$ nazveme *supremum* množiny A, pokud platí:

i. $a \preccurlyeq s$ pro každé $a \in A$.

ii. Pro každé $s' \in X$ platí: jestliže $a \preccurlyeq s'$ pro každé $a \in A$, potom $s \preccurlyeq s'$.

Podobně, ale se všemi nerovnostmi v obráceném směru, se definuje *infimum* podmnožiny $A \subseteq X$.

a) Jaký prvek je supremem prázdné množiny?

b) Najděte příklad uspořádané množiny, jejíž každá neprázdná podmnožina má supremum , ale ne každá neprázdná podmnožina má infimum.