Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série — Dualita a mnohostěny

nápověda 10.12.2024, odevzdat do 14:00 17.12.2024

1. (Doplnění důkazu, že každý V-mnohostěn v $\mathbb{R}^d$ je také H-mnohostěnem.)
   (a) Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní množina. Dokažte, že C^* je omezená právě tehdy, když 0 leží ve vnitřku C. **[2]**
   (b) Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\operatorname{conv}(X \cup \{0\})$. **[2]**
   (c) Nechť $P \subset \mathbb{R}^d$ je V-mnohostěn obsahující 0 ve svém vnitřku. Ukažte, že P^* je průnik poloprostorů duálních k vrcholům P. **[1]**

2. Definujme *konvexní těleso* jako omezenou uzavřenou konvexní množinu v $\mathbb{R}^d$, jejíž vnitřek obsahuje 0. Řekneme, že konvexní těleso je *hladké*, pokud v každém bodě hranice ma právě jednu tečnou nadrovinu. Řekneme, že konvexní těleso je *ostře konvexní*, pokud jeho hranice neobsahuje úsečku kladné délky. Dokažte, že konvexní těleso K je ostře konvexní právě tehdy, když K^* je hladké. **[1]**

3. Nechť $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$. Uvažujme konvexní obal C polopřímek $p_1, \ldots, p_n$ začínajících v počátku a určených těmito vektory (tedy $p_i = \{x \in \mathbb{R}^n; (\exists \lambda \geq 0)\, x = \lambda v_i\}$).

   Dokažte, že v C existuje polopřímka, která s každou polopřímkou p_i svírá ostrý úhel. **[3]**

4. Uvažme n úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech n úseček lze protnout jednou přímkou. (Protnout znamená mít společný alespoň jeden bod, tj. přímka obsahující úsečku ji i protíná.) **[3]**

5. Dokažte, že každý konvexní mnohostěn $P \subset \mathbb{R}^d$ je kolmou projekcí nějakého k-rozměrného pravidelného simplexu v $\mathbb{R}^n$, pro vhodná k, n. (*Kolmou projekcí* rozumíme zobrazení π z prostoru $\mathbb{R}^n$ na podprostor $M \cong \mathbb{R}^d$ vnořený v $\mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\pi(x) - x$ kolmý na M. Simplex je *pravidelný*, pokud všechny jeho hrany mají stejnou délku.) **[4+nápověda]**

Informace o cvičení naleznete na `https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg`