# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 3. série - Průsečíková čísla a počítání incidencí

odevzdat do 12:20 13.12.2023

1. Dokažte, že graf s $n$ vrcholy, který má úsečkové nakreslení v rovině bez třech vzájemně se křížících hran, má $O(n^{3/2})$ hran. Můžete použít průsečíkové lemma. (*Úsečkové nakreslení* je nakreslení, kde každá hrana je nakreslena jako úsečka.) **[2]**

2. Nechť $I_{1\text{circ}}(n, m)$ označuje maximální počet incidencí mezi $n$ body a $m$ jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že $I_{1\text{circ}}(n, n) = O(n^{4/3})$. **[3]**

3. Mějme systém podmnožin $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ $n$-prvkové množiny $N$ (tj. $\forall i \in [n]\ M_i \subseteq N$), z nichž každé dvě mají nejvýše jeden společný prvek. Počtem incidencí mezi $N$ a $\mathcal{M}$ budeme rozumět $I(N, \mathcal{M}) := \sum_{i=1}^{n} |M_i|$. Rozhodněte, zda musí platit $I(N, \mathcal{M}) = O(n^{4/3})$. **[2]**

4. Najděte $n$-bodovou množinu v $\mathbb{R}^4$ s $\Omega(n^2)$ jednotkovými vzdálenostmi. **[3]**

5. Nechť $P$ je $n$-bodová množina v rovině.

   (a) Nechť $k > 1$. Ukažte, že maximální možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň $k$ bodů $P$, je $O(n^2/k^3+n/k)$ a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou $P$ je $O(n^2/k^2 + n)$. **[3]**

   (b) Je dáno $\alpha \in (0, \pi)$. Ukažte, že $P$ určuje nejvýše $O(n^{7/3})$ trojúhelníků s alespoň jedním úhlem o velikosti $\alpha$. (Nápověda: rozdělte trojúhelníky $ABC$ s úhlem $\alpha$ při vrcholu $A$ na 2 skupiny podle toho, zda přímka $AC$ obsahuje více než $n^{1/3}$ bodů z $P$.) **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg`