

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

1. série — Konvexní množiny

nápověda 22.10.2024, odevzdat do 14:00 29.10.2024

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. Najděte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, která je sjednocením dvou konvexních množin a jejíž doplněk se skládá z 5 navzájem oddělených oblastí (přesněji komponent souvislosti). **[2]**
2. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu nebo část postupu jejího důkazu). **[2]**
3. Uvažujme množinu $2d + 2$ bodů $M = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{d+1}, y_{d+1}\}$ v \mathbb{R}^d . Dokažte, že M se dá rozdělit na dvě podmnožiny A a B , z nichž každá obsahuje pro každé $i = 1, 2, \dots, d + 1$ právě jeden bod z $\{x_i, y_i\}$, tak, aby se konvexní obaly A a B protínaly. (Můžete využít toho, že $(d+1)$ -tice vektorů $x_i - y_i$ je lineárně závislá a poté postupovat podobně jako v důkaze Radonovy věty.) **[2]**
4. Nechť M je konečná množina alespoň čtyř bodů v rovině, z nichž některé jsou červené a zbylé jsou modré. Navíc platí, že pro libovolnou čtveřici V bodů z M existuje přímka, která ostře odděluje červené body z V od modrých bodů z V . Dokažte, že pak existuje přímka ostře oddělující všechny červené body z M od všech modrých bodů z M . **[3]**
5. Nechť X_1, X_2, \dots, X_{d+1} jsou konečné množiny bodů z \mathbb{R}^d takové, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$ počátek leží v $\text{conv}(X_i)$. Dokažte, že potom existují body $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$, takové, že počátek leží v $\text{conv}(\{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}\})$. **[4, nápověda]**

Informace o cvičení naleznete na <https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg>