Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

5. série - Voroného diagramy a arrangementy

odevzdat do 5.1.2015

1. Nechť P je konečná množina bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na společné přímce a žádné čtyři na společné kružnici. Definujme na P graf DT (zvaný *Delaunayova triangulace*): dva body a, b jsou spojeny hranou, právě když existuje kruh mající a i b na hranici a žádný bod z P uvnitř.

   (a) Dokažte, že DT je triangulace — rovinný graf, jehož každá stěna kromě vnější je trojúhelník. **[3]**

   (b) Dokažte, že DT je duální graf ke grafu Voroného diagramu množiny P. **[3]**

2. Arrangement A nadrovin v $\mathbb{R}^d$ je *jednoduchý*, pokud průnik každé k-tice nadrovin z A je $(d-k)$-dimenzionální pro $k = 2, 3, \ldots, d+1$. Pro $k = 0, 1, \ldots, d$ dokažte, že počet k-stěn jednoduchého arrangementu n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ je roven **[3]**

$$\sum_{i=d-k}^{d} \binom{n}{i} \binom{i}{d-k}.$$

3. Nechť $P = \{p_1, p_2 \ldots p_n\}$ je množina bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodě x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   Ukažte, že maximální počet různých "výhledů"je $O(n^4)$. **[2]**

4. (a) Kolik je d-dimenzionálních buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají rovnicím $x_i = x_j$, kde $1 \leq i < j \leq d$? **[3]**

   (b) Na kolik d-dimenzionálních buněk rozdělí prostor $\mathbb{R}^d$ nadroviny určené rovnicemi $x_i + x_j = 0$ a $x_i = x_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq d$? **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`