Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série - Cyklické mnohostěny a Voroného diagramy

nápověda 15.12.2014, odevzdat do 22.12.2014

1. Zobecnění Erdősovy-Szekeresovy věty na d-rozměrné cyklické mnohostěny.

   (a) Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou body v $\mathbb{R}^d$. Vektory $y_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ získáme přidáním nové složky s hodnotou 1 za poslední složku vektoru x_i. Body x_i byly zvoleny tak, že pro libovolnou volbu indexů $i_1 < i_2 < \cdots < i_{d+1}$ je determinant matice se sloupci $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{d+1}}$ nenulový a vždy se stejným znaménkem. Dokažte, že mnohostěn, který je konvexním obalem bodů $x_1, \ldots, x_n$, je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[4+napov]**

   (b) Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel n, d existuje N takové, že z každých N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$ lze vybrat n bodů, jejichž konvexní obal je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[3]**

2. Buď V množina n bodů na momentové křivce $\{(t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d : t \in \mathbb{R}\}$. Nechť W je podmnožina nejvýše $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ z nich. Ukažte, že $\mathrm{conv}(W)$ je stěna $\mathrm{conv}(V)$. Odvoďte počet $\leq k$-dimenzionálních stěn cyklického d-dimenzionálního mnohostěnu, kde $k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$. **[3]**

3. (a) Ukažte, že pro $n \geq 2$ má Voroného diagram $2n$-bodové množiny $A_{2n} := \{(i, 0, 0) : i = 1, 2 \ldots n\} \cup \{(0, n, j) : j = 1, 2 \ldots n\}$ v $\mathbb{R}^3$ alespoň cn^2 vrcholů, kde c je nějaká kladná konstanta. **[3]**

   (b) Ukažte, že pro $n \geq k$ může mít Voroného diagram $2n$-bodové množiny v $\mathbb{R}^{2k-1}$ až $c_k n^k$ vrcholů, kde c_k je nějaká kladná konstanta. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`