Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. série - Mnohostěny a dualita

nápověda 1.12.2014, odevzdat do 8.12.2014

1. Pro $X \subseteq \mathbb{R}^d$ označme duální množinu k X jako X^*. Neboli $X^* = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ pro všechna } x \in X\}$.

   (a) Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní množina. Dokažte, že C^* je omezená právě tehdy, když počátek 0 leží ve vnitřku C. **[2]**

   (b) Nechť $C = \operatorname{conv}(X) \subseteq \mathbb{R}^d$. Ukažte, že $C^* = \bigcap_{x \in X} \mathcal{D}_0^-(x)$, kde $\mathcal{D}_0^-(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1\}$. **[2]**

   (c) Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\operatorname{conv}(X \cup \{0\})$. **[2]**

   (d) Za pomoci předchozích částí a faktu, že každý H-polytop je také V-polytopem, dokažte, že každý V-polytop v $\mathbb{R}^d$ lze vyjádřit jako průnik konečně mnoha poloprostorů. Neboli že každý V-polytop je H-polytopem. **[1]**

2. Nalezněte kompaktní konvexní množinu $C \subseteq \mathbb{R}^3$, pro kterou není $\operatorname{ex}(C) = \{x \in C : \operatorname{conv}(C \setminus \{x\}) \neq C\}$ uzavřená. **[3]**

3. Dokažte, že každý polytop $P \subset \mathbb{R}^d$ je kolmou projekcí nějakého k-rozměrného pravidelného simplexu v $\mathbb{R}^n$, pro vhodná k, n. (Kolmou projekcí rozumíme zobrazení π z prostoru $\mathbb{R}^n$ na podprostor $M \cong \mathbb{R}^d$ vnořený v $\mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\pi(x) - x$ kolmý na M.) **[4+napov]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`