Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

2. série - Věty Hellyho typu a počítání incidencí

nápověda 10.11.2014, odevzdat do 24.11.2014

1. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p, q)-vlastnost, pokud $n \geq p$ a z každé p-tice z $\mathcal{C}$ lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost $s(\mathcal{C})$ souboru množin $\mathcal{C}$ je velikost nejmenší množiny bodů X takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň 1 bod z X.
   (a) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) se $(4, 3)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. **[3]**
   (b) Najděte soubor $\mathcal{C}$ několika osových obdélníků s $(3, 2)$-vlastností, pro který $s(\mathcal{C}) = 3$. **[2]**
2. (a) Mějme $r < \frac{\pi}{3}$ a množinu A aspoň tří bodů na sféře takovou, že každou trojici bodů z A lze pokrýt sférickým diskem o poloměru r. Dokažte, že lze všechny body z A pokrýt sférickým diskem o poloměru r. **[4+napov]**
   Sféra je hranice koule v $\mathbb{R}^3$. *Sférický disk* se středem v x a poloměrem r je množina bodů sféry, které jsou při pohledu ze středu koule v úhlové vzdálenosti nejvýše r od x.
   (b) Dokažte, že v části (a) nelze $r < \frac{\pi}{3}$ nahradit $r < \frac{\pi}{2}$. **[2]**
3. Najděte n-bodovou množinu v $\mathbb{R}^4$ s $\Omega(n^2)$ jednotkovými vzdálenostmi. **[3]**
4. V *nakreslení* grafu G vrcholy G odpovídají různým bodům v rovině a hrany G jsou reprezentovány spojitými křivkami, které spojují příslušné vrcholy. *Křížení* dvou hran je jejich společný bod, který nereprezentuje vrchol. Předpokládáme, že žádné tři hrany nemají společné křížení, každé dvě hrany sdílejí jen konečně mnoho bodů a žádná hrana neprochází body, které reprezentují jiné vrcholy než jsou její koncové vrcholy. Pro libovolný konečný graf G ukažte, že v každém nakreslení grafu G, které má nejmenší počet křížení, žádné dvě hrany nesdílí víc než jeden bod. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`