Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série - Voroného diagramy a Erdősova-Szekeresova věta

nápověda 31.12.2013, odevzdat do 7.1.2014

1. Pořádně dokažte, že region *reg*(p) bodu p ve Voroného diagramu konečné množiny bodů $P \subset \mathbb{R}^d$ je neomezený právě tehdy, když p leží na hranici conv(P). **[2]**

2. (a) Ukažte, že pro $n \geq 2$ má Voroného diagram $2n$-bodové množiny $A_{2n} := \{(i,0,0) : i = 1,2\dots n\} \cup \{(0,n,j) : j = 1,2\dots n\}$ v $\mathbb{R}^3$ alespoň cn^2 vrcholů, kde c je nějaká kladná konstanta. **[3]**

   (b) Ukažte, že pro $n \geq k$ může mít Voroného diagram $2n$-bodové množiny v $\mathbb{R}^{2k-1}$ až $c_k n^k$ vrcholů, kde c_k je nějaká kladná konstanta. **[2]**

3. Nechť P je konečná množina bodů v rovině, z nichž žádné 3 neleží na společné přímce a žádné 4 na společné kružnici. Definujme na P graf DT (zvaný *Delaunayova triangulace*): dva body a, b jsou spojeny hranou, právě když existuje kruh mající a i b na hranici a žádný bod z P uvnitř.

   (a) Dokažte, že DT je pseudotriangulace — rovinné nakreslení souvislého grafu, jehož každá stěna kromě vnější je trojúhelník. **[3]**

   (b) Dokažte, že DT je duální graf ke grafu Voroného diagramu množiny P. **[3]**

   (c) Nechť T je minimální kostra v úplném grafu na P, kde váhy hran jsou vzdálenosti bodů. Dokažte, že $T \subseteq DT$. **[2]**

4. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina bodů v rovině velikosti alespoň $n(k)$ obsahuje buď konvexně nezávislou podmnožinu velikosti k, nebo k bodů na společné přímce. **[3]**

5. Dokažte Erdősovu-Szekeresovu větu v $\mathbb{R}^d$: pro každé $d \geq 3$ a $k \in \mathbb{N}$ existuje $n = n_d(k) \in \mathbb{N}$ takové, že v každé množině s alespoň n body z $\mathbb{R}^d$ v obecné poloze (tj. žádných $d+1$ bodů z dané množiny neleží na společné nadrovině) lze najít konvexně nezávislou podmnožinu velikosti k. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`