Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série - Dualita a Mnohostěny

nápověda 26.11.2013, odevzdat do 03.12.2013

1. Nechť $C = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_1| + \cdots + |x_d| \leq 1\}$ (zobecněný osmistěn). Ukažte, že C^* je krychle $\{x \in \mathbb{R}^d : \max |x_i| \leq 1\}$. **[2]**

2. Pro množinu $C \subseteq \mathbb{R}^d$ ukažte, že $C = C^*$ právě tehdy, když C je uzavřená jednotková koule se středem v počátku. **[2]**

3. Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\mathrm{conv}(X \cup \{0\})$. **[2]**

4. Uvažme n úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech n úseček lze protnout jednou přímkou. (Protnout znamená mít společný alespoň jeden bod, tj. přímka obsahující úsečku ji i protíná.) **[3]**

5. Mějme kompaktní konvexní d-rozměrné mnohostěny P a Q.

   (a) Dokažte, že $P \cup Q$ je konvexní právě tehdy, když pro každý u vrchol P a každý v vrchol Q jejich spojnice splňuje $[u, v] \subset P \cup Q$. **[3]**

   (b) Dokažte, že $P \cup Q$ je nekonvexní právě tehdy, když existuje u vrchol P a v vrchol Q, jejichž spojnice splňuje $[u, v] \cap (P \cup Q) = \{u, v\}$. **[1]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`