Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série - Minkowského věta, dualita

nápověda 28.11.2011, odevzdat do 5.12.2011

1. Ukažte, že pro každé kladné iracionální číslo α existuje nekonečně mnoho dvojic čísel $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$
[1]

2. Dokažte, že pro $\alpha = \sqrt{2}$ existuje jen konečně mnoho dvojic $m, n \in \mathbb{N}$ splňujících
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{4n^2}.$$
[3]

3. Nechť α_1, α_2 jsou reálná čísla. Dokažte, že pro dané $N \in \mathbb{N}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, taková, že
$$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}}, \quad i = 1, 2.$$
[3]

4. Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\mathrm{conv}(X \cup \{0\})$. **[2]**

5. Uvažme n úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech n úseček lze protnout jednou přímkou. (Protnout znamená mít společný alespoň jeden bod, tj. přímka obsahující úsečku ji i protíná.) **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`