

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

2. série - Věty Hellyho typu

nápověda 31.10.2011, odevzdat do 7.11.2011

1. Necht' C_1, \dots, C_n je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a necht' K je kompaktní podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z C_1, \dots, C_n obsahuje posunutou kopii K , potom také průnik všech C_1, \dots, C_n obsahuje posunutou kopii K . [2]
2. (a) Mějme $r < \frac{\pi}{3}$ a množinu A aspoň tří bodů na sféře takovou, že každou trojici bodů z A lze pokrýt sférickým diskem o poloměru r . Dokažte, že lze všechny body z A pokrýt sférickým diskem o poloměru r . [4]
Dokážete nahradit $\frac{\pi}{3}$ větším úhlem? (Za každých 5 stupňů navíc [**bonus 1 bod**]).
Sféra je hranice koule v \mathbb{R}^3 . *Sférický disk* se středem v x a poloměrem r je množina bodů sféry, které jsou při pohledu ze středu koule v úhlové vzdálenosti nejvýše r od x .
(b) Dokažte, že v části (a) nelze $r < \frac{\pi}{3}$ nahradit $r < \frac{\pi}{2}$. [2]
3. Mějme konečné množiny bodů A_1, \dots, A_k v \mathbb{R}^d , přičemž $k \leq d$. Dokažte, že existuje afinní podprostor \mathbb{R}^d dimenze $k - 1$ takový, že každá nadrovina, která jej obsahuje, dělí každou A_i na dvě části o velikosti alespoň $|A_i|/(d + 1)$. [2]
4. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p, q) -vlastnost, pokud $n \geq p$ a z každé p -tice z \mathcal{C} lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost $s(\mathcal{C})$ souboru množin \mathcal{C} je velikost nejmenší množiny bodů X takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň 1 bod z X .
 - (a) Dokažte, že je-li \mathcal{C} konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s $(2, 2)$ -vlastností, pak $s(\mathcal{C}) = 1$. [1]
 - (b) Dokažte, že je-li \mathcal{C} konečný soubor osových obdélníků se $(4, 3)$ -vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. [3]
 - (c) Najděte soubor \mathcal{C} několika osových obdélníků s $(3, 2)$ -vlastností, pro který $s(\mathcal{C}) = 3$. [2]

Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/kvg>