Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

7. serie - Arrangementy

nápověda 3.1.2007, odevzdat do 10.1.2007

1. Mějme soubor n libovolných kruhů $K_1, \ldots, K_n$ v rovině.
   - (a) Ukažte, že počet průsečíků hranic těchto kruhů, které neleží uvnitř žádného jiného kruhu K_i, je maximálně $O(n)$ (tj. hranice sjednocení všech K_i se skládá z $O(n)$ kruhových oblouků). **[3]**
   - (b) Ukažte, že počet průsečíků hranic těchto kruhů, které leží v nejvýše k kruzích K_i, je maximálně $O(nk)$ (použíjte větu o hladinách). **[4]**
2. Nechť P je m-bodová množina v rovině.
   - (a) Ukažte, že maximalní možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň $k > 1$ bodů P, je $O(m^2/k^2 + m/k)$ a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou P je $O(m^2/k^2 + m)$. **[3]**
   - (b) Nechť $0 < k \leq \sqrt{m}$ je celočíselný parametr. Ukažte, že nejvýše $O(m^2/k)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně k a nejvýše $\sqrt{m}$ bodů P. Podobně pro $K > \sqrt{m}$ ukažte, že nejvýše $O(Km)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně $\sqrt{m}$ a nejvýše K bodů P. **[4]**
   - (c) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že libovolná m-bodová množina $P \subseteq \mathbb{R}^2$, která neobsahuje alespoň cm bodů ležících v přímce, musí svými body určovat nejméně cm^2 různých přímek. **[2]**
   - (d) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že každá m-bodová množina P, jejíž body neleží na jedné přímce, obsahuje bod, kterým prochazí nejméně cm různých přímek určených body P. **[1]**
