Úlohy k řešení:

1. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené n platí $2^n > n^2$.

2. Představte si, že máte novorozený párek králíků opačného pohlaví. Od doby, kdy dosáhnou věku dvou měsíců, se jim každý měsíc narodí pár králíků (opačného pohlaví). Každý další pár králíků se chová stejně: od věku dvou měsíců se jim každý měsíc narodí nový pár králíků.

   - Nechť f_n je počet párů králíků n měsíců po začátku experimentu. Máme tedy $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ a $f_2 = 2$. Najděte vzorec pro f_n, ve kterém figurují některé předchozí členy posloupnosti.
   - Nechť r je kladné reálné číslo, pro které platí $r^2 = r + 1$ (to platí pro $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, což je zhruba rovno 1.618). Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}_0$ máme $f_n \geq r^{n-1}$.

3. Nechť A, B, C jsou množiny. Platí mezi následujícími dvojicemi nějaká inkluze? Jinými slovy, pro každou dvojici rozhodněte, zda platí výrok: *Pro každé tři množiny A, B, C, levá strana je podmnožinou pravé...* nebo obdobně s levou a pravou stranou prohozenou.

   (a) $A \setminus (B \cup C)$ vs. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   (b) $A \times (B \cap C)$ vs. $(A \times B) \cap (A \times C)$

   (c) $\mathcal{P}(A \setminus B)$ vs. $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

4. Uvažte následující dva výroky:

   (a) *Existuje číslo M takové, že pro každé x v množině S máme $|x| \leq M$.*

   (b) *Pro každé x v množině S existuje číslo M takové, že $|x| \leq M$.*

   Rozmyslete si, co výroky říkají a jestli jeden z nich plyne z toho druhého. Napište negace obou výroků. Platí mezi negacemi také nějaká implikace?

5. Jsou následující dvojice výroků ekvivalentní? Pokud ne, najděte konkrétní predikáty P a Q tak, aby byl jeden výrok pravdivý a druhý nepravdivý. Všechny kvantifikace jsou přes množinu přirozených čísel.

   (a) $\forall x \exists y : P(x,y)$ vs. $\exists y \forall x : P(x,y)$

   (b) $\forall x \forall y : P(x,y)$ vs. $\forall y \forall x : P(x,y)$

   (c) $(\forall x : P(x)) \Rightarrow (\forall x : Q(x))$ vs. $\forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$

6. Je něco špatně na následujícím?
   Věta: Pro každé celé číslo $n \geq 0$ platí $5^n = 1$.
   Důkaz. Je zřejmé, že pro $n = 0$ tvrzení platí. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna celá čísla m, kde $0 \leq m \leq k$ a dokazujeme ho pro $k+1$. Máme

$$5^{k+1} = \frac{5^k \cdot 5^k}{5^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$